Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Istituzioni di Analisi Superiore, primo modulo

Prova Scritta del 24 gennaio 2000

Cognome e Nome:

Matricola: Documento di identità (se chiesto):

Tempo a disposizione: 3 ore.

1. Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione. Ci proponiamo di dire qualcosa sull'insieme dei punti di derivabilità di f, con un minimo di ipotesi di regolarità su f.

a. Dimostrare che se l'insieme dei punti di discontinuità di f ha misura nulla secondo Lebesgue, allora f è misurabile secondo Lebesgue.

b. Dimostrare che se l'insieme dei punti di discontinuità di f è al più numerabile, allora f è boreliana.

c. Poniamo

$$\sigma_1(x) := \inf_{\delta>0} \sup\left\{ \left| \frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x} - \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x} \right| \;:\; \max_{i=1,2} |x_i - x| < \delta, \quad x_1 \neq x \neq x_2 \right\}.$$

Senza ipotesi su f, dimostrare che f è derivabile in x se e solo se $\sigma_1(x) = 0$. Inoltre se l'insieme dei punti di discontinuità di f è al più numerabile, allora σ_1 è una funzione boreliana $\mathbb{R} \to [0, +\infty]$, e l'insieme dei punti di derivabilità di f è boreliano.

d. Poniamo

$$\sigma_2(x) := \inf_{\delta>0} \sup\left\{ \left| \frac{f(x_1)-f(x_3)}{x_1-x_3} - \frac{f(x_2)-f(x_4)}{x_2-x_4} \right| \;:\; \max_{i=1,\dots,4} |x_i - x| < \delta, \begin{array}{c} x_1 \neq x_3, \\ x_2 \neq x_4 \end{array} \right\}.$$

Senza ipotesi su f, dimostrare che $0 \le \sigma_1 \le \sigma_2$, che σ_2 è semicontinua superiormente, e che $\sigma_2(x) = 0$ se e solo se esiste finito il limite

$$\lim_{\substack{(y,z)\to(x,x) \\ y\neq z}} \frac{f(y)-f(z)}{y-z} =: \bar{D}f(x)\,.$$

Dedurre che senza ipotesi su f l'insieme degli $x \in \mathbb{R}$ per i quali esiste finito $\bar{D}f(x)$ è boreliano. L'esistenza di $\bar{D}f(x)$ implica la derivabilità? E viceversa?

2. Calcolare

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{x}\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n}\, dx\,.$$

(Per vedere se $n \mapsto (1 + x/n)^n$ è crescente, prendere il logaritmo e derivare due volte. . .)

Punti: 8+8+20+25, 18

Università degli Studi di Udine Anno Accademico 1999/2000

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Istituzioni di Analisi Superiore, primo modulo

Prova Scritta del 24 gennaio 2000

Svolgimento

1. a. Sia E l'insieme dei punti di discontinuità di f, e supponiamo che E abbia misura nulla secondo Lebesgue. Vogliamo dimostrare che f è misurabile secondo Lebesgue. Per definizione di misurabilità di una funzione, dobbiamo dimostrare che preso un qualsiasi V aperto in $\mathbb{R}$, la contrimmagine $f^{-1}(V)$ è un insieme misurabile secondo Lebesgue. Scriviamo

$$f^{-1}(V) = \big(f^{-1}(V) \cap E\big) \cup \big(f^{-1}(V) \setminus E\big)\,.$$

L'insieme $f^{-1}(V) \cap E$ è misurabile perché è un sottinsieme di E, che ha misura nulla secondo Lebesgue. Per quanto riguarda $f^{-1}(V) \setminus E$, affermiamo che esiste un aperto $W \subseteq \mathbb{R}$ tale che $f^{-1}(V) \setminus E = W \setminus E$. Infatti sia $x \in f^{-1}(V) \setminus E$. Poiché $x \notin E$, f è continua in x. Poiché V è aperto, per definizione di continuità esiste un intorno aperto U_x di x in $\mathbb{R}$ tale che $f(U_x) \subseteq V$. Sia W l'unione degli U_x al variare di $x \in f^{-1}(V) \setminus E$. Allora W è aperto in $\mathbb{R}$ perché unione di aperti. Poiché $x \in U_x$, abbiamo che $f^{-1}(V) \setminus E \subseteq W \setminus E$. Viceversa, dato $x_0 \in W \setminus E$, abbiamo che $f(x_0) \in V$ perché $f(U_x) \subseteq V$ per ogni x, per cui $x_0 \in f^{-1}(V) \setminus E$. Essendo W aperto, è anche misurabile secondo Lebesgue. Quindi pure $W \setminus E$ è misurabile, e abbiamo la conclusione.

b. Il ragionamento è identico al punto **a**, eccetto che qui E è un insieme al più numerabile, e quindi boreliano, in quanto unione di una famiglia al più numerabile di singoletti, i quali sono boreliani perché chiusi.

c. La f è derivabile in x se e solo se esiste finito il

$$\lim_{x_1 \to x} \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}\,.$$

Se definiamo

$$g_x(x_1) := \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} \qquad \text{per } x \in \mathbb{R} \setminus \{x\}\,,$$

possiamo dire che f è derivabile in x se e solo se $g_x(x_1)$ ha limite finito per $x_1 \to x$. Per il criterio di Cauchy (in variabile reale), $g_x(x_1)$ ha limite finito per $x_1 \to x$ se e solo se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} \quad \big(0 < |x_1 - x| < \delta \text{ e } 0 < |x_2 - x| < \delta\big) \Rightarrow \big|g_x(x_1) - g_x(x_2)\big| \leq \varepsilon\,.$$

Per definizione di estremo superiore, questo equivale a sua volta a

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \sup\Big\{\big|g_x(x_1) - g_x(x_2)\big| \ :\ \max_{i=1,2} |x_i - x| < \delta\,, \quad x_1 \neq x \neq x_2\Big\} \leq \varepsilon\,.$$

cioè a

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \inf_{\delta > 0} \sup\Big\{\big|g_x(x_1) - g_x(x_2)\big| \ :\ \max_{i=1,2} |x_i - x| < \delta\,, \quad x_1 \neq x \neq x_2\Big\} \leq \varepsilon\,,$$

e infine a

$$\inf_{\delta > 0} \sup\Big\{\big|g_x(x_1) - g_x(x_2)\big| \ :\ \max_{i=1,2} |x_i - x| < \delta\,, \quad x_1 \neq x \neq x_2\Big\} = 0\,.$$

Questo dimostra che f è derivabile in x se e solo se $\sigma_1(x) = 0$.

Sia ora E l'insieme dei punti di discontinuità di f, e supponiamo che E sia al più numerabile. Vogliamo dimostrare che σ_1 è allora una funzione boreliana. Cominciamo col notare che la funzione

$$\delta \mapsto \sup\Big\{ \big|g_x(x_1) - g_x(x_2)\big| \ : \ \max_{i=1,2} |x_i - x| < \delta \,, \quad x_1 \neq x \neq x_2 \Big\}$$

è debolmente crescente. Quindi l'estremo inferiore sui δ reali > 0 coincide con l'estremo inferiore sui δ razionali > 0 (basterebbe su una qualunque successione δ_n che tenda a 0 da destra):

$$\sigma_1(x) = \inf_{\substack{\delta>0\\ \delta\in\mathbb{Q}}} \sup\Big\{ \big|g_x(x_1) - g_x(x_2)\big| \ : \ \max_{i=1,2} |x_i - x| < \delta \,, \quad x_1 \neq x \neq x_2 \Big\} \,.$$

Per dimostrare che σ_1 è boreliana basta dimostrare che per ogni $\delta > 0$ la funzione

$$x \mapsto \sup\Big\{ \big|g_x(x_1) - g_x(x_2)\big| \ : \ \max_{i=1,2} |x_i - x| < \delta \,, \quad x_1 \neq x \neq x_2 \Big\}$$

è boreliana. L'estremo superiore è di una famiglia più che numerabile di parametri. Vorremmo riscriverlo come un estremo superiore su una famiglia numerabile. L'idea è che i valori di $g_x(x_1)$ con x_1 reale sono approssimabili con valori con x_1 nell'insieme numerabile $\mathbb{Q} \cup E$. Più precisamente

$$\begin{aligned} &\forall \varepsilon > 0 \quad \forall x_1 \in \mathbb{R} \text{ tale che } 0 < |x_1 - x| < \delta \\ &\qquad \exists x' \in \mathbb{Q} \cup E \text{ tale che } \quad 0 < |x' - x| < \delta \quad \text{ e } \quad \big|g_x(x') - g_x(x_1)\big| < \varepsilon \,. \end{aligned}$$

Infatti, se $x_1 \in E$ basta prendere banalmente $x' = x_1$. Se invece $x_1 \notin E$ e $x_1 \neq x$, la funzione $y \mapsto g_x(y)$ risulta continua in x_1, e quindi il valore $g_x(x_1)$ è approssimabile a piacere da valori $g_x(x')$ con $x' \in \mathbb{Q}$ vicino a x_1. Quindi

$$\begin{aligned} &\sup\Big\{ \big|g_x(x_1) - g_x(x_2)\big| \ : \ \max_{i=1,2} |x_i - x| < \delta \,, \quad x_1 \neq x \neq x_2 \Big\} = \\ &\qquad = \sup\Big\{ \big|g_x(x_1) - g_x(x_2)\big| \ : \ x_1, x_2 \in \mathbb{Q} \cup E, \quad \max_{i=1,2} |x_i - x| < \delta \,, \quad x_1 \neq x \neq x_2 \Big\} \end{aligned}$$

La funzione $x \mapsto g_x(x_1)$ non ha per dominio tutto $\mathbb{R}$, però possiamo definire

$$\tilde{g}_x(x_1) := \big(f(x_1) - f(x)\big)\varphi_{x_1}(x) = \begin{cases} g_x(x_1) & \text{se } x_1 \neq x, \\ 0 & \text{se } x_1 = x \end{cases} \qquad \text{dove } \varphi_{x_1}(x) := \begin{cases} 1/(x_1 - x) & \text{se } x \neq x_1, \\ 0 & \text{se } x = x_1. \end{cases}$$

Risulta che la funzione $x \mapsto \tilde{g}_x(x_1)$ è boreliana come funzione da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, perché φ_{x_1} ed f sono boreliane. Ora abbiamo che

$$\begin{aligned} &\sup\Big\{ \big|g_x(x_1) - g_x(x_2)\big| \ : \ x_1, x_2 \in \mathbb{Q} \cup E, \quad \max_{i=1,2} |x_i - x| < \delta \,, \quad x_1 \neq x \neq x_2 \Big\} = \\ &\qquad = \sup\Big\{ \big|\tilde{g}_x(x_1) - \tilde{g}_x(x_2)\big| \ : \ x_1, x_2 \in \mathbb{Q} \cup E, \quad \max_{i=1,2} |x_i - x| < \delta \,, \quad x_1 \neq x \neq x_2 \Big\} \,. \end{aligned}$$

Poniamo

$$h_{x_1,x_2,\delta}(x) := \big|\tilde{g}_x(x_1) - \tilde{g}_x(x_2)\big| \chi_{]0,\delta[}(|x_1 - x|)\chi_{]0,\delta[}(|x_2 - x|) \,.$$

Per ogni x_1, x_2 fissati, la funzione $x \mapsto h_{x_1,x_2,\delta}(x)$ è boreliana perché combinazione di funzioni boreliane tramite somme, prodotti e composizioni. Possiamo scrivere

$$\sup\Big\{ \big|\tilde{g}_x(x_1) - \tilde{g}_x(x_2)\big| \ : \ x_1, x_2 \in \mathbb{Q} \cup E, \quad \max_{i=1,2} |x_i - x| < \delta \,, \quad x_1 \neq x \neq x_2 \Big\} = \sup_{x_1, x_2 \in \mathbb{Q} \cup E} h_{x_1,x_2,\delta}(x) \,,$$

e quindi

$$\sigma_1(x) = \inf_{\substack{\delta>0\\ \delta\in\mathbb{Q}}} \sup_{x_1, x_2 \in \mathbb{Q} \cup E} h_{x_1,x_2,\delta}(x) \,.$$

Pertanto σ_1 risulta boreliana, perché ottenibile tramite inviluppi di famiglie numerabili di funzioni boreliane. In particolare l'insieme dei punti di derivabilità di f, che coincide con $\sigma_1^{-1}(\{0\})$, è boreliano. Il risultato vale con ipotesi più deboli su f? Non lo so.

Alternativa. L'insieme D dei punti di derivabilità di f si può anche scrivere come l'insieme degli x tali che

$$-\infty < \min\lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = \max\lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} < +\infty \,.$$

Dimostrare che questi minimo e massimo limite sono funzioni boreliane nell'ipotesi che f sia continua fuori da un insieme al più numerabile, e dedurne che allora D è boreliano.

d. La funzione

$$\sigma_2(x) := \inf_{\delta>0} \sup\left\{ \left| \frac{f(x_1)-f(x_3)}{x_1-x_3} - \frac{f(x_2)-f(x_4)}{x_2-x_4} \right| \ :\ \max_{i=1,\dots,4} |x_i - x| < \delta,\ \begin{matrix} x_1 \neq x_3, \\ x_2 \neq x_4 \end{matrix} \right\}.$$

è maggiore o uguale a $\sigma_1(x)$. Infatti l'estremo superiore che definisce $\sigma_1(x)$ si ottiene da quello di $\sigma_2(x)$ restringendo le variabili x_3, x_4 a coincidere con x, e sappiamo che l'estremo superiore di un insieme è $\geq$ a quello di un sottinsieme. Entrambi $\sigma_1(x)$ e $\sigma_2(x)$ sono ≥ 0 perché si tratta di estremi superiori o inferiori di quantità tutte ≥ 0. Per dimostrare che σ_2 è semicontinua superiormente, prendiamo $\alpha, \bar{x} \in \mathbb{R}$ tali che $\sigma(\bar{x}) < \alpha$. Allora esiste $\delta_0 > 0$ tale che

$$\sup\left\{ \left| \frac{f(x_1)-f(x_3)}{x_1-x_3} - \frac{f(x_2)-f(x_4)}{x_2-x_4} \right| \ :\ \max_{i=1,\dots,4} |x_i - \bar{x}| < \delta_0,\ \begin{matrix} x_1 \neq x_3, \\ x_2 \neq x_4 \end{matrix} \right\} < \alpha\,.$$

Sia $x \in \mathbb{R}$ tale che $|x - \bar{x}| < \delta_0/2$. Allora per ogni $x_1, \dots x_4 \in \mathbb{R}$

$$\max_{i=1,\dots,4} |x_i - x| < \frac{\delta_0}{2} \quad \Rightarrow \quad \max_{i=1,\dots,4} |x_i - \bar{x}| < \delta_0\,,$$

per cui

$$\begin{aligned} &\left\{ \left| \frac{f(x_1)-f(x_3)}{x_1-x_3} - \frac{f(x_2)-f(x_4)}{x_2-x_4} \right| \ :\ \max_{i=1,\dots,4} |x_i - x| < \frac{\delta_0}{2},\ \begin{matrix} x_1 \neq x_3, \\ x_2 \neq x_4 \end{matrix} \right\} \subseteq \\ &\qquad \subseteq \left\{ \left| \frac{f(x_1)-f(x_3)}{x_1-x_3} - \frac{f(x_2)-f(x_4)}{x_2-x_4} \right| \ :\ \max_{i=1,\dots,4} |x_i - \bar{x}| < \delta_0,\ \begin{matrix} x_1 \neq x_3, \\ x_2 \neq x_4 \end{matrix} \right\} \end{aligned}$$

da cui, prendendo gli estremi superiori,

$$\begin{aligned} &\sup\left\{ \left| \frac{f(x_1)-f(x_3)}{x_1-x_3} - \frac{f(x_2)-f(x_4)}{x_2-x_4} \right| \ :\ \max_{i=1,\dots,4} |x_i - x| < \frac{\delta_0}{2},\ \begin{matrix} x_1 \neq x_3, \\ x_2 \neq x_4 \end{matrix} \right\} \leq \\ &\qquad \leq \sup\left\{ \left| \frac{f(x_1)-f(x_3)}{x_1-x_3} - \frac{f(x_2)-f(x_4)}{x_2-x_4} \right| \ :\ \max_{i=1,\dots,4} |x_i - \bar{x}| < \delta_0,\ \begin{matrix} x_1 \neq x_3, \\ x_2 \neq x_4 \end{matrix} \right\} < \alpha \end{aligned}$$

e infine $\sigma_2(x) < \alpha$. In particolare, se $\sigma_2(\bar{x}) < \alpha$ e $|x - \bar{x}| < \delta_0/2$ allora $\sigma_2(x) < \alpha$. Questo mostra che l'insieme $\{x \in \mathbb{R} \ :\ \sigma_2(x) < \alpha\}$ è aperto, cioè che σ_2 è semicontinua superiormente. Resta da dimostrare che $\sigma_2(x) = 0$ se e solo se esiste finito il

$$\lim_{\substack{(y,z)\to(x,x) \\ y\neq z}} \frac{f(y)-f(z)}{y-z} =: \bar{D}f(x)\,.$$

Per il criterio di Cauchy sui limiti, dire che esiste $\bar{D}f(x)$ equivale a dire che

$$\begin{aligned} &\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R} \quad \Big(\max_{i=1,\dots,4} |x_i - x| < \delta \quad \text{e} \quad x_1 \neq x_3,\ x_2 \neq x_4\Big) \Rightarrow \\ &\qquad \Rightarrow \left| \frac{f(x_1)-f(x_3)}{x_1-x_3} - \frac{f(x_2)-f(x_4)}{x_2-x_4} \right| \leq \varepsilon\,. \end{aligned}$$

Questo equivale successivamente a

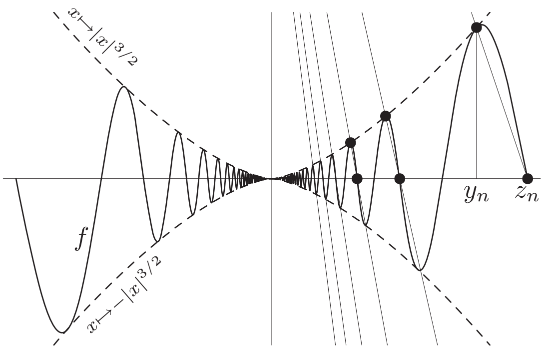
$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \sup\left\{ \left| \frac{f(x_1)-f(x_3)}{x_1-x_3} - \frac{f(x_2)-f(x_4)}{x_2-x_4} \right| \ :\ \max_{i=1,\dots,4} |x_i - x| < \delta,\ \begin{matrix} x_1 \neq x_3, \\ x_2 \neq x_4 \end{matrix} \right\} \leq \varepsilon\,,$$

e a

$$\inf_{\delta>0} \sup\left\{ \left| \frac{f(x_1)-f(x_3)}{x_1-x_3} - \frac{f(x_2)-f(x_4)}{x_2-x_4} \right| \ :\ \max_{i=1,\dots,4} |x_i - x| < \delta,\ \begin{matrix} x_1 \neq x_3, \\ x_2 \neq x_4 \end{matrix} \right\} = 0\,,$$

cioè a $\sigma_2(x) = 0$. Dunque l'insieme degli $x \in \mathbb{R}$ tali che esista finito $\bar{D}f(x)$ è boreliano giacché coincide con $\sigma_2^{-1}(\{0\})$, che è la contrimmagine di un boreliano tramite una funzione boreliana (perché semicontinua). Più precisamente, è l'intersezione di una famiglia numerabile di aperti:

$$\sigma_2^{-1}(\{0\}) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \big\{x \in \mathbb{R} \ :\ \sigma_2(x) < 1/n\big\}\,.$$



L'esistenza di $\bar{D}f(x)$ implica la derivabilità, perché $\sigma_2(x) = 0$ implica $\sigma_1(x) = 0$. La derivabilità di f in x non implica l'esistenza di $\bar{D}f(x)$, come si vede per esempio prendendo

$$f(x) := \begin{cases} |x|^{3/2} \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Questa f è derivabile con derivata nulla in $x = 0$:

$$\left| \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right| = \left| \frac{|x|^{3/2} \operatorname{sen}(1/x) - 0}{x - 0} \right| \leq \sqrt{|x|} \to 0$$

per $x \to 0$, però se prendiamo $y_n := 1/(2n\pi + \pi/2)$, $z_n := 1/(2n\pi)$ abbiamo che $(y_n, z_n) \to (0,0)$, $y_n \neq z_n$ e

$$\begin{aligned} \frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - z_n} &= \frac{y_n^{3/2} \operatorname{sen}(2n\pi + \pi/2) - z_n^{3/2} \operatorname{sen} 2n\pi}{y_n - z_n} = \frac{y_n^{3/2}}{y_n - z_n} = \\ &= \frac{1/(2n\pi + \pi/2)^{3/2}}{1/(2n\pi + \pi/2) - 1/(2n\pi)} = \frac{2n\pi/\sqrt{2n\pi + \pi/2}}{-\pi/2} \to -\infty \quad \text{per } n \to +\infty\,, \end{aligned}$$

per cui non esiste (finita, almeno) $\bar{D}f(0)$. Questa particolare funzione f è anche un esempio classico di una funzione derivabile dappertutto ma non di classe C^1.

Alternativa. Al posto del criterio di Cauchy, tentare un approccio con massimi e minimi limiti.

Approfondimenti. Se esiste $\bar{D}f(x)$ per un certo x, allora $f'(x) = \bar{D}f(x)$. Se esiste finita $\bar{D}f(x)$ per un certo x, allora f è lipschitziana (quindi continua) in un intorno di x, ma non viceversa. Supponiamo che $x_n \to \bar{x}$, che esista $f'(x_n)$ per ogni n, e che esista anche $\bar{D}f(\bar{x})$; allora $f'(x_n) \to f'(x)$. Se f ha derivata in tutto un intorno di x, allora esiste $\bar{D}f(x)$ se e solo se f' è continua in x. Se f è convessa allora l'esistenza di $f'(x)$ e di $\bar{D}f(x)$ per un certo x si equivalgono.

2. Per $n \geq 1$ la funzione

$$f_n(x) := \frac{1}{\sqrt[n]{x}\left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n}$$

è continua (quindi misurabile secondo Lebesgue) e positiva per $x \in \,]0, +\infty[$. Pertanto l'integrale

$$\int_0^{+\infty} f_n(x)\, dx$$

ha senso. Inoltre l'integrale è finito quando $n > 1$, perché l'andamento di $f_n(x)$ è dell'ordine di $x^{-1/n}$ per $x \to 0^+$, mentre è dell'ordine di $x^{-n-1/n}$ per $x \to +\infty$. Per $n \to +\infty$ l'integrando ha limite:

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{x}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n &= \exp \ln\left(\sqrt[n]{x}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \right) = \exp\left(\frac{\ln x}{n} + n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) \right) = \\ &= \exp\left(\frac{\ln x}{n} + n\left(\frac{x}{n} + o(1/n) \right) \right) = \exp\left(\frac{\ln x}{n} + x + o(1) \right) \longrightarrow \exp x\,. \end{aligned}$$

Quindi

$$\int_0^{+\infty} \left(\lim_{n \to +\infty} f_n(x) \right) dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{e^x}\, dx = \left[-e^{-x} \right]_0^{+\infty} = 1\,.$$

Ci chiediamo se si può scambiare l'ordine fra integrale e limite:

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\, dx \stackrel{?}{=} \int_0^{+\infty} \left(\lim_{n \to +\infty} f_n(x) \right) dx\,.$$

Per $x = 1$ la successione

$$n \mapsto \Big(1 + \frac{x}{n}\Big)^n$$

è la famosa successione $(1+1/n)^n$, che tende *crescendo* al numero di Nepero. Per vedere se la crescenza vale anche per gli altri x, studiamo la funzione

$$g(n) := \ln\Big(1 + \frac{x}{n}\Big)^n = n \ln\Big(1 + \frac{x}{n}\Big) .$$

Deriviamo due volte rispetto a n (considerato qui come variabile reale):

$$\begin{aligned} g'(n) &= \ln\Big(1+\frac{x}{n}\Big) + n\frac{1}{1+x/n}\Big(-\frac{x}{n^2}\Big) = \ln\Big(1+\frac{x}{n}\Big) - \frac{x}{n+x} , \\ g''(n) &= \frac{1}{1+x/n}\Big(-\frac{x}{n^2}\Big) + \frac{x}{(n+x)^2} = -\frac{x}{n(n+x)} + \frac{x}{(n+x)^2} = \frac{x}{n+x}\Big(-\frac{1}{n} + \frac{1}{n+x}\Big) = \\ &= -\frac{x^2}{n(n+x)^2} . \end{aligned}$$

Per $x > 0$ e $n > 0$ si vede che $g''(n) > 0$, per cui $g'(n)$ è strettamente decrescente. D'altra parte $g'(n) \to 0$ per $n \to +\infty$. Quindi $g'(n) > 0$ per ogni n. Deduciamo che la quantità

$$e^{g(n)} = \Big(1 + \frac{x}{n}\Big)^n$$

è crescente rispetto a n per ogni $x > 0$. In particolare l'estremo superiore per $n \geq 2$ è il valore per $n = 2$:

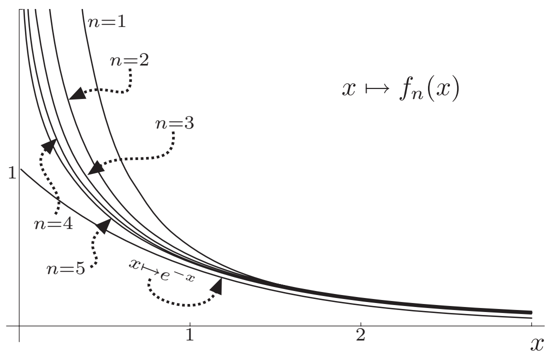
$$\inf_{n\geq 2}\Big(1 + \frac{x}{n}\Big)^n = \Big(1 + \frac{x}{2}\Big)^2 = \frac{(2+x)^2}{4} \qquad \forall x > 0 .$$

Resta da minorare la radice ennesima, ma questa è facile, perché $n \mapsto \sqrt[n]{x} = x^{1/n}$ è crescente per $0 < x < 1$ e decrescente per $x > 1$:

$$\inf_{n\geq 2} \sqrt[n]{x} = \min\{\sqrt{x}, 1\} \qquad \forall x > 0 .$$

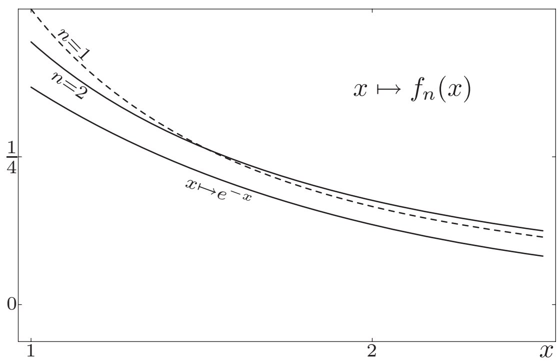
Quindi l'integranda può essere maggiorata così:

$$\begin{aligned} \sup_{n\geq 2} |f_n(x)| &= \sup_{n\geq 2} \frac{1}{\sqrt[n]{x}\Big(1+\dfrac{x}{n}\Big)^n} = \\ &= \frac{4}{(2+x)^2 \min\{\sqrt{x}, 1\}} \qquad \forall x > 0 . \end{aligned}$$



La funzione a secondo membro non dipende da n (ovviamente) ed è in $L^1(]0, +\infty[)$ perché è continua e si comporta come $x^{-1/2}$ per $x \to 0^+$ e come x^{-2} per $x \to +\infty$. Possiamo applicare il teorema della convergenza dominata e ricavare che

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx = \int_0^{+\infty} \Big(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\Big)\,dx = 1 .$$



Notare che il teorema della convergenza monotona non si può applicare, perché l'integrando è sì positivo ma non è monotono con n allo stesso modo per tutti gli x. Per esempio è strettamente decrescente rispetto a n per $x = 1$, mentre per $x = 2$ cresce passando da $n = 1$ a $n = 2$, come si vede anche dalla figura in basso. Ho il sospetto che sia decrescente rispetto a n per $n \geq 2$.