Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 1998/99

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Istituzioni di Analisi Superiore, primo modulo

Prova Scritta del 28 settembre 1999

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento di identità (se chiesto):

Tempo a disposizione: 3 ore.

1. Sia Y uno spazio topologico. Si rammenta che una funzione $\varphi: Y \to [-\infty, +\infty]$ si dice semicontinua inferiormente se l'insieme $\varphi^{-1}(]a, +\infty])$ è aperto per ogni $a \in \mathbb{R}$, e si dice semicontinua inferiormente se $\varphi^{-1}([-\infty, a[)$ è aperto per ogni $a \in \mathbb{R}$. Sia $(X, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura positiva e $f: X \times Y \to [0, +\infty[$ una funzione tale che $x \mapsto f(x, y)$ sia misurabile per ogni $y \in Y$. Poniamo $F(y) := \int_X f(x, y)\, d\mu(x)$ per $y \in Y$.

a. Supponiamo che per ogni $x \in X$ la funzione $y \mapsto f(x, y)$ sia semicontinua inferiormente. Dimostrare che anche F è semicontinua inferiormente.
(Lemma di Fatou).

b. Mostrare che può succedere che per ogni $x \in X$ la funzione $y \mapsto f(x, y)$ sia semicontinua superiormente senza che F lo sia.

c. Supponiamo che esista $g \in L^1(\mu)$ tale che $f(x, y) \le g(x)$ per ogni $x \in X$, $y \in Y$ e che per ogni $x \in X$ la funzione $y \mapsto f(x, y)$ sia semicontinua superiormente. Dimostrare che allora pure F è semicontinua superiormente.
(Applicare il punto **a** a $g(x) - f(x, y)$).

2. Per $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ poniamo

$$F_n(\alpha) := \int_0^1 \frac{nx \operatorname{sen} x}{1 + (nx)^\alpha}\, dx\,.$$

a. Mostrare che $F_n(\alpha)$ è un numero reale ben definito e calcolarne il limite per $n \to +\infty$, in dipendenza da α.

b. Dimostrare che per ogni $N, n, x > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$ vale l'identità

$$\frac{1}{1 + (nx)^\alpha} = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(-1)^k}{(nx)^{\alpha(k+1)}} + \frac{(-1)^N (nx)^{-N\alpha}}{1 + (nx)^\alpha}\,,$$

Trovare poi, se c'è, un reale β, dipendente da α, tale che $n^\beta F_n(\alpha)$ abbia limite finito non nullo per $n \to +\infty$.
Per $\alpha \le 0$ è facile. Per $\alpha > 3$ usare l'identità con $N = 1$. Per $3/2 \le \alpha < 3$ prendere $N = 2$... Per valutare il termine fuori dalla sommatoria si può usare il cambio di variabile $y = nx$).

Punti: 7+7+7, 10+30

Università degli Studi di Udine | Anno Accademico 1998/99

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Istituzioni di Analisi Superiore, primo modulo

Prova Scritta del 28 settembre 1999

Svolgimento

1. a. Supponiamo per assurdo che F non sia semicontinua inferiormente, cioè che esista $a \in \mathbb{R}$ tale che l'insieme $F^{-1}(]a,+\infty])$ non sia aperto. Questo vuol dire che esiste $\bar{y} \in F^{-1}(]a,+\infty])$ e una successione $y_n \in Y \setminus F^{-1}(]a,+\infty])$ tale che $y_n \to \bar{y}$. In altre parole

$$F(y_n) \leq a\,, \qquad y_n \to \bar{x} \quad \text{per } n \to +\infty\,, \qquad F(\bar{y}) > a\,.$$

D'altra parte per ipotesi $y \mapsto f(x,y)$ è semicontinua inferiormente per ogni $x \in X$. Fissiamo $\varepsilon > 0$. Per ogni $x \in X$ l'insieme

$$\big(f(x,\,\cdot\,)\big)^{-1}\Big(\big]f(x,\bar{y})-\varepsilon,+\infty\big]\Big)$$

è aperto e contiene $\bar{y}$, per cui y_n gli appartiene pure definitivamente;

$$f(x,\bar{y})-\varepsilon < f(x,y_n) \quad \text{per ogni } n \text{ grande.}$$

Quindi vale la relazione

$$f(x,\bar{y})-\varepsilon \leq \min_{n\to+\infty}\lim f(x,y_n) \qquad \forall x \in X \quad \forall \varepsilon > 0\,.$$

Passando al limite per $\varepsilon \to 0^+$ si ottiene

$$f(x,\bar{y}) \leq \min_{n\to+\infty}\lim f(x,y_n) \qquad \forall x \in X\,.$$

Integriamo ambo i membri e applichiamo il lemma di Fatou:

$$\begin{aligned} F(\bar{x}) &= \int_X f(x,\bar{y})\,d\mu(x) \leq \int_X \Big(\min_{n\to+\infty}\lim f(x,y_n)\Big)\,d\mu(x) \overset{\text{Fatou}}{\leq} \\ &\overset{\text{Fatou}}{\leq} \min_{n\to+\infty}\lim \int_X f(x,y_n)\,d\mu(x) = \min_{n\to+\infty}\lim F(y_n)\,. \end{aligned}$$

che contraddice le nostre assunzioni, secondo le quali

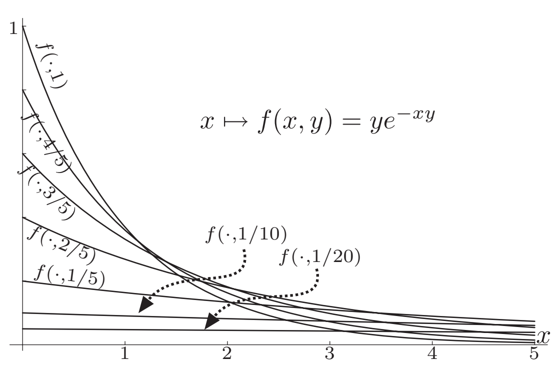
$$a < F(\bar{y}) \qquad \text{e} \qquad \min_{n\to+\infty}\lim F(y_n) \leq a\,.$$

b. Prendiamo per esempio $X = Y := [0,+\infty[$ (X con la misura di Lebesgue) e poniamo

$$f(x,y) := ye^{-xy}\,.$$

Allora

$$\begin{aligned} F(y) &= \int_0^{+\infty} ye^{-xy}\,dx = \big[-e^{-xy}\big]_{x=0}^{x=+\infty} = \\ &= \begin{cases} -e^0+e^0 = 0 & \text{se } y = 0, \\ = -e^{-\infty}+e^0 = 1 & \text{se } y > 0. \end{cases} \end{aligned}$$



La funzione F ovviamente non è continua. Per il punto **a** deve essere semicontinua inferiormente. Pertanto non può essere semicontinua superiormente. Possiamo anche vederlo direttamente:

$$F^{-1}\big([-\infty,1/2[\big)=\{0\}\,,$$

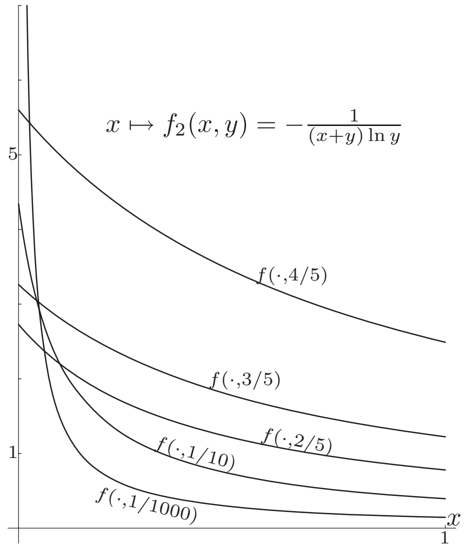
non è aperto in Y.
Prima variante: $X_1:=[0,+\infty[$, $Y_1:=\mathbb{R}$,

$$f_1(x,y):=y^2e^{-xy^2}\,.$$

Allora

$$F_1(y)=\int_0^{+\infty}y^2e^{-xy^2}\,dx=\big[-e^{-xy^2}\big]_{x=0}^{x=+\infty}=\begin{cases}-e^0+e^0=0 & \text{se } y=0,\\ -e^{+\infty}+e^0=1 & \text{se } y>0.\end{cases}$$

Qui pure F_1 non è continua, però è semicontinua inferiormente, per cui non può essere semicontinua superiormente.



Seconda variante, con X di misura finita: $X_2:=\,]0,1]$, $Y_2:=[0,1[$ e poniamo

$$f_2(x,y):=\begin{cases}-\dfrac{1}{(x+y)\ln y} & \text{se } 0<y<1,\\ 0 & \text{se } y=0.\end{cases}$$

Si vede che $y\mapsto f_2(x,y)$ è continua su Y_2 (basta passare al limite per $y\to0^+$). Poi

$$F_2(0)=0\,,$$

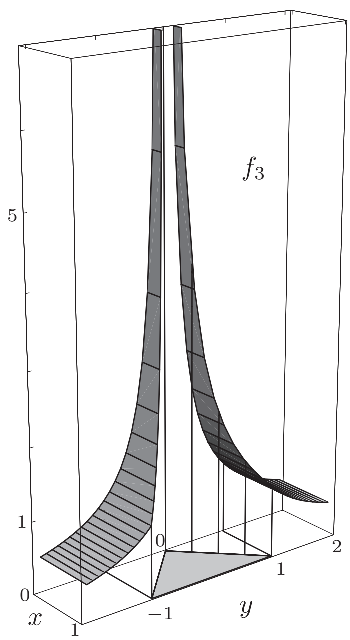
$$F_2(y)=\int_0^1 f(x,y)\,dx=\Big[-\frac{\ln(x+y)}{\ln y}\Big]_{x=0}^{x=1}=$$

$$=\frac{-\ln(1+y)+\ln y}{\ln y}=1-\frac{\ln(1+y)}{\ln y}\qquad \text{se } y>0.$$

Chiaramente $F_2(y)\to1\neq F_2(0)$ per $y\to0^+$, per cui F_2 non è continua. Essendo però semicontinua inferiormente, non può essere semicontinua superiormente.

Terza variante, con X intervallo compatto: $X_3:=[0,1]$, $Y_3:=\mathbb{R}$ e

$$f_3(x,y):=\begin{cases}\dfrac{1}{|y|} & \text{se } 0<x\le|y|,\\ 0 & \text{altrimenti.}\end{cases}$$



Per ogni $x\in[0,1]$ la funzione $y\mapsto f_3(x,y)$ è semicontinua superiormente. Infatti per $x=0$ diventa $f(0,y)\equiv0$, mentre per $x>0$

$$\big(f(x,\,\cdot\,)\big)^{-1}\big([-\infty,a[\big)=$$

$$=\begin{cases}\mathbb{R} & \text{se } a>1/x,\\ ]-\infty,-1/a[\,\cup\,]-1,1[\,\cup\,]1/a,+\infty[& \text{se } 0<a\le1/x,\\ \varnothing & \text{se } a\le0,\end{cases}$$

che è sempre un insieme aperto in $Y=\mathbb{R}$. L'integrale di $x\mapsto f_3(x,y)$ su X è

$$F_3(y)=\int_0^1 f_3(x,y)\,dx=\begin{cases}0 & \text{se } y=0,\\ 1 & \text{se } 0<|y|\le1,\\ 1/|y| & \text{se } |y|>1.\end{cases}$$

F_3 non è semicontinua superiormente, perché per esempio

$$F_3^{-1}\big([-\infty,1[\big)=\,]-\infty,-1[\,\cup\{0\}\cup\,]1,+\infty[\,,$$

che non è aperto in $\mathbb{R}$. Si dà il caso che F_3 sia semicontinua inferiormente, ma questo non segue direttamente dal punto **a**, in quanto $y\mapsto f_3(x,y)$ non è semicontinua inferiormente quando $0<x<1$.

c. Sia $g \in L^1(\mu)$ tale che $f(x,y) \le g(x)$ per ogni $x \in X$, $y \in Y$ e che per ogni $x \in X$ la funzione $y \mapsto f(x,y)$ sia semicontinua superiormente. Allora la funzione $y \mapsto -f(x,y)$ è semicontinua inferiormente. Aggiungendo la costante (per x fissato) $g(x)$ otteniamo che anche la funzione

$$y \mapsto \tilde{f}(x,y) := g(x) - f(x,y)$$

è semicontinua inferiormente per ogni $x \in X$. Inoltre $\tilde{f} \ge 0$ per ipotesi. Applicando il punto **a** a $\tilde{f}$ si ottiene che la funzione

$$y \mapsto \tilde{F}(y) := \int_X \tilde{f}(x,y)\,d\mu(x)$$

è semicontinua inferiormente. Ma per la linearità dell'integrale (un addendo è in $L^1(\mu)$, mentre l'altro è semiintegrabile)

$$\tilde{F}(y) := \int_X \tilde{f}(x,y)\,d\mu(x) = \int_X \big(g(x) - f(x,y)\big)\,d\mu(x) = \int_X g\,d\mu - \int_X f(x,y)\,d\mu(x) = \int_X g\,d\mu - F(y)\,.$$

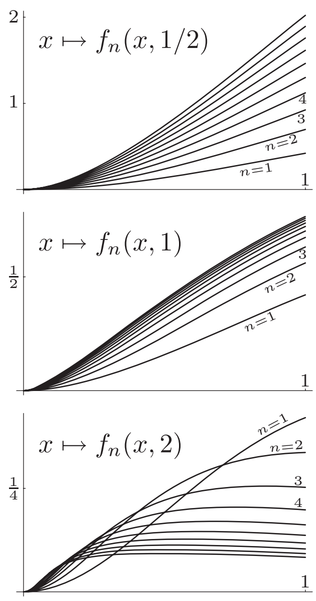
Per ricavare $F(y)$ da questa relazione dobbiamo stare attenti che $F(y)$ e $\tilde{F}(y)$ potrebbero benissimo essere infinite, quindi non possiamo impunemente aggiungerle e toglierle da ambo i membri. Però $\int_X g\,d\mu$ è finito per ipotesi, per cui possiamo toglierlo da ambo i membri, e poi cambiare di segno, arrivando lo stesso a

$$F(y) = -\tilde{F}(y) + \int_X g\,d\mu\,.$$

$-\tilde{F}$ è semicontinua superiormente, e lo rimane aggiungendo la costante finita $\int_X g\,d\mu$. Pertanto F è semicontinua superiormente.

2. a. Poniamo

$$f_n(x,\alpha) := \frac{nx \operatorname{sen} x}{1 + (nx)^\alpha}\,.$$



Questa funzione è definita certamente per $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $x \in \,]0,1]$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Per $x = 0$ non possiamo prendere $\alpha \le 0$, ma il valore $x = 0$ non influisce sull'integrale. Poiché $[0,1] \subset [0,\pi]$, la funzione f_n è non negativa sul dominio che ci interessa. Inoltre è chiaramente continua rispetto a x per $x \in \,]0,1]$, ed ha limite nullo per $x \to 0^+$ in quanto

$$0 \le f_n(x,\alpha) \le \frac{nx^2}{1+0} \to 0 \qquad \text{per } x \to 0^+\,.$$

Pertanto l'integrale

$$F_n(\alpha) := \int_0^1 f_n(x,\alpha)\,dx$$

esiste finito (anche nel senso di Riemann) per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Calcoliamo il limite puntuale di $f_n(x,\alpha)$ per $n \to +\infty$:

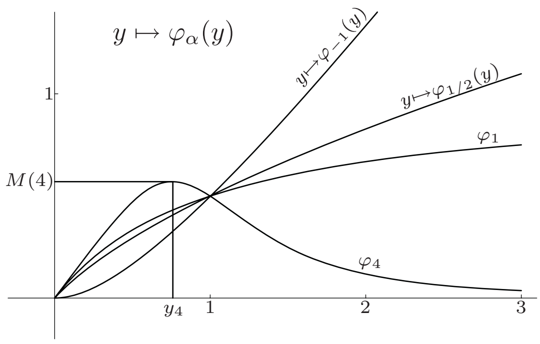
$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x,\alpha) = \lim_{n\to+\infty} \frac{nx \operatorname{sen} x}{1+(nx)^\alpha} = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0, \\ +\infty & \text{se } x \in \,]0,1] \text{ e } \alpha < 1, \\ \operatorname{sen} x & \text{se } x \in \,]0,1],\ \alpha = 1, \\ 0 & \text{se } x \in \,]0,1],\ \alpha > 1. \end{cases}$$

Per $\alpha < 1$ il limite di $F_n(\alpha)$ per $n \to +\infty$ si può ricavare dal lemma di Fatou:

$$\begin{aligned} +\infty \;\le\; \int_0^1 (+\infty)\,dx = \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(x,\alpha)\,dx = \int_0^1 \min\lim_{n\to+\infty} f_n(x,\alpha)\,dx \overset{\text{Fatou}}{\le} \\ \overset{\text{Fatou}}{\le} \min\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x,\alpha)\,dx = \min\lim_{n\to+\infty} F_n(\alpha) \qquad \text{se } \alpha < 1, \end{aligned}$$

da cui

$$\lim_{n\to+\infty} F_n(\alpha) = +\infty \quad \text{se } \alpha < 1\,.$$



Può convenire notare che n appare sempre moltiplicato per x nella formula, per cui si può porre

$$\varphi_\alpha(y) := \frac{y}{1+y^\alpha}\,, \quad \text{per } y > 0\,,$$

di modo che $f_n(x,\alpha) = \varphi_\alpha(nx)\operatorname{sen} x$. Per $y \to 0^+$ ogni $\phi_\alpha(y)$ tende a 0. Inoltre se $\alpha \geq 1$ si vede che $\varphi_\alpha(y)$ ha limite finito (1 se $\alpha = 1$, 0 se $\alpha > 1$) per $y \to +\infty$. Quindi

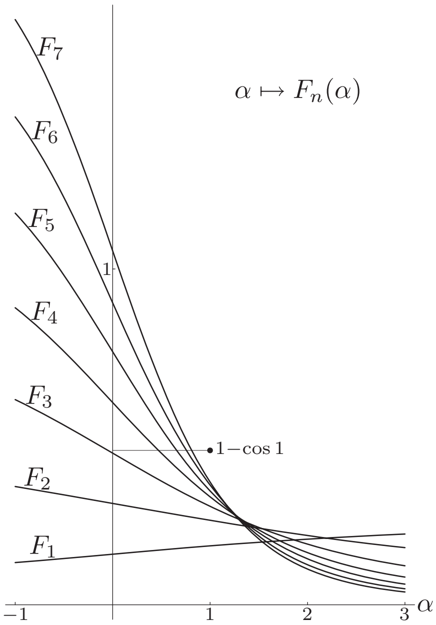
$$\sup_{y\geq 0} \varphi_\alpha(y) = M(\alpha) < +\infty \qquad \text{se } \alpha \geq 1.$$

La ricaduta su $f_n(x,\alpha)$ è che se $\alpha \geq 1$

$$\sup_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} \bigl|f_n(x,\alpha)\bigr| = \sup_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} \bigl|\varphi_\alpha(nx)\operatorname{sen} x\bigr| \leq M(\alpha) \in L^1\bigl([0,1]\bigr)\,,$$

e pertanto possiamo passare al limite per $n \to +\infty$ sotto il segno di integrale per la convergenza dominata:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} F_n(\alpha) &= \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x,\alpha)\,dx \overset{\substack{\text{conv.}\\ \text{domin.}}}{=} \\
&= \int_0^1 \Bigl(\lim_{n\to+\infty} f_n(x,\alpha)\Bigr) dx = \\
&= \begin{cases} \int_0^1 \operatorname{sen} x\,dx = 1 - \cos 1 & \text{se } \alpha = 1, \\ \int_0^1 0 \operatorname{sen} x\,dx = 0 & \text{se } \alpha > 1. \end{cases}
\end{aligned}$$



Non sarebbe necessario, ma nemmeno guasta studiare la φ_α più attentamente. Calcoliamone la derivata:

$$\varphi'_\alpha(y) = \frac{1\cdot(1+y^\alpha) - y\cdot \alpha y^{\alpha-1}}{(1+y^\alpha)^2} = \frac{1-(\alpha-1)y^\alpha}{(1+y^\alpha)^2}\,.$$

Se $\alpha \leq 1$ la φ_α è strettamente crescente su tutto $]0,+\infty[$, e quindi anche $n \mapsto \varphi_\alpha(nx)\operatorname{sen} x = f_n(x,\alpha)$ è strettamente crescente per ogni $x > 0$ e $\alpha \leq 1$ fissati, e si può usare la convergenza monotona invece del lemma di Fatou:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} F_n(\alpha) &= \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x,\alpha)\,dx \overset{\substack{\text{conv.}\\ \text{monot.}}}{=} \int_0^1 \Bigl(\lim_{n\to+\infty} f_n(x,\alpha)\Bigr) dx = \\
&= \begin{cases} \int_0^1 (+\infty)\,dx = +\infty & \text{se } \alpha < 1, \\ \int_0^1 \operatorname{sen} x\,dx = 1 - \cos 1 & \text{se } \alpha = 1. \end{cases}
\end{aligned}$$

Per $\alpha > 1$ si calcola esplicitamente la costante $M(\alpha)$, perché la φ_α ha massimo globale nel punto $y_\alpha := 1/(\alpha-1)^{1/\alpha}$:

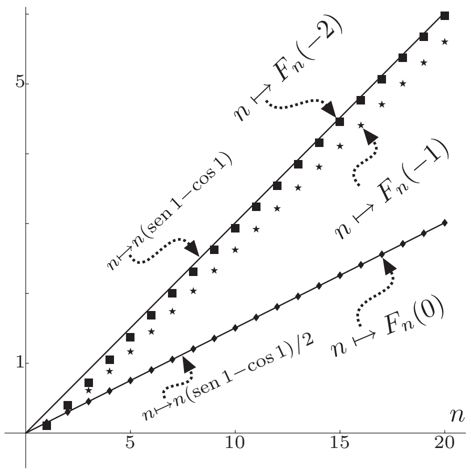
$$M(\alpha) = \varphi_\alpha(y_\alpha) = \varphi_\alpha\Bigl(\frac{1}{(\alpha-1)^{1/\alpha}}\Bigr) = \frac{1/(\alpha-1)^{1/\alpha}}{1 + 1/(\alpha-1)} = \frac{(\alpha-1)^{1-1/\alpha}}{\alpha}\,.$$

b. Possiamo scrivere

$$\frac{F_n(\alpha)}{n} = \int_0^1 \frac{x \operatorname{sen} x}{1+(nx)^\alpha}\,dx\,.$$

Per $\alpha \leq 0$ la funzione integranda è positiva e crescente con n e quindi possiamo passare al limite per il teorema della convergenza monotona (si può anche usare la convergenza dominata):

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{F_n(\alpha)}{n} = \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{x\operatorname{sen} x}{1+(nx)^\alpha}\,dx = \int_0^1 \Bigl(\lim_{n\to+\infty} \frac{x\operatorname{sen} x}{1+(nx)^\alpha}\Bigr)\,dx = \begin{cases} \int_0^1 x \operatorname{sen} x\,dx & \text{se } \alpha < 0, \\ (1/2)\int_0^1 x\operatorname{sen} x\,dx & \text{se } \alpha = 0. \end{cases}$$



Calcoliamo

$$\int_0^1 x \operatorname{sen} x \, dx = \big[\operatorname{sen} x - x \cos x\big]_0^1 = \operatorname{sen} 1 - \cos 1 \approx 0{,}301 \,.$$

Per $\alpha \le 0$ dunque la β cercata è -1 e

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{F_n(\alpha)}{n} = \begin{cases} \operatorname{sen} 1 - \cos 1 & \text{se } \alpha < 0, \\ (\operatorname{sen} 1 - \cos 1)/2 & \text{se } \alpha = 0 \end{cases}$$

(per $\alpha = 0$ la successione è costante).

Approfondimento. La figura fa pensare che esista una costante c tale che $F_n(-1) = (\operatorname{sen} 1 - \cos 1)n + c + o(1)$ per $n \to +\infty$. Che sia vero?

Tornando al problema principale per $\alpha > 0$, facciamo il cambio di variabile $y = nx$ nell'integrale:

$$F_n(\alpha) = \int_0^n \frac{n(y/n)\operatorname{sen}(y/n)}{1+y^\alpha} \cdot \frac{dy}{n} = \frac{1}{n}\int_0^n \frac{y \operatorname{sen}(y/n)}{1+y^\alpha} dy = \frac{1}{n^2}\int_0^n \frac{y^2}{1+y^\alpha} \cdot \frac{\operatorname{sen}(y/n)}{y/n} dy =$$
$$= \frac{1}{n^2}\int_0^{+\infty} \frac{y^2}{1+y^\alpha} \cdot \frac{\operatorname{sen}(y/n)}{y/n} \chi_{[0,n]}(y)\, dy \,.$$

La funzione $x \mapsto (\operatorname{sen} x)/x$ è continua e > 0 su $]0,1]$ e tende a 1 per $x \to 0^+$. Quindi esistono costanti c_1, c_2 tali che

$$0 < c_1 \le \frac{\operatorname{sen} x}{x} \le c_2 < +\infty \qquad \forall x \in \,]0,1] \,.$$

Maggioriamo l'integrando dell'ultimo integrale:

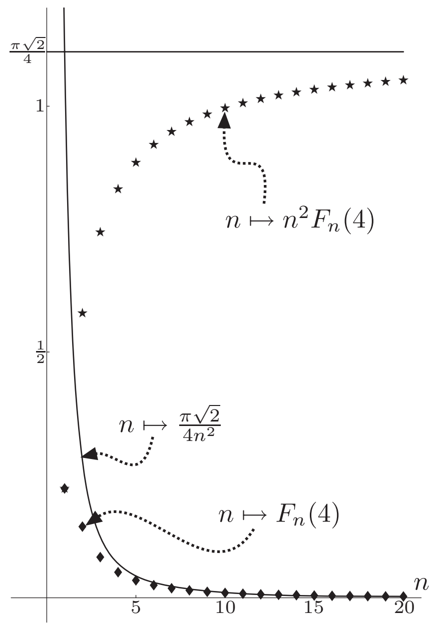
$$\sup_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} \left| \frac{y^2}{1+y^\alpha} \cdot \frac{\operatorname{sen}(y/n)}{y/n} \chi_{[0,n]}(y) \right| \le c_2 \frac{y^2}{1+y^\alpha} \,.$$

La funzione all'ultimo membro è in $L^1([0,+\infty[)$ quando $2-\alpha < -1$, cioè quando $\alpha > 3$. Per questi valori di α dunque possiamo passare al limite per convergenza dominata, e la β cercata risulta 2:

$$\lim_{n\to+\infty} n^2 F_n(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{y^2}{1+y^\alpha}\, dy \qquad \text{se } \alpha > 3 \,.$$

Ad esempio per $\alpha = 4$ l'integrale si può calcolare elementarmente e risulta che $n^2 F_n(4) \to \pi\sqrt{2}/4$ per $n \to +\infty$. Per $\alpha = 3$ possiamo valutare l'integrale dall'alto e dal basso:

$$c_1 \int_0^n \frac{y^2}{1+y^3} dy \le \int_0^n \frac{y^2}{1+y^3} \cdot \frac{\operatorname{sen}(y/n)}{y/n} dy \le c_2 \int_0^n \frac{y^2}{1+y^3} dy \,,$$

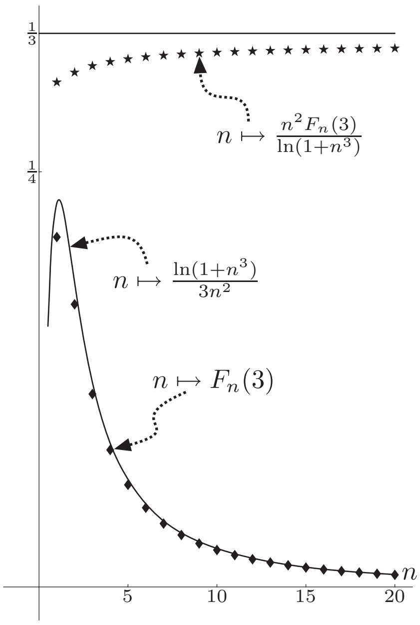


e anche calcolare esplicitamente

$$\int_0^n \frac{y^2}{1+y^3} dy = \left[\frac{1}{3}\ln(1+y^3)\right]_0^n = \frac{1}{3}\ln(1+n^3) \,.$$

Possiamo pertanto scrivere

$$\frac{c_1}{3n^2}\ln(1+n^3) \le F_n(3) \le \frac{c_2}{3n^2}\ln(1+n^3) \,,$$



e questo esclude che esista alcun $\beta \in \mathbb{R}$ tale che $n^\beta F_n(3)$ abbia limite finito per $n \to +\infty$. Infatti scriviamo

$$\underbrace{\frac{c_1 \ln(1+n^3)}{\ln n^3}}_{\to c_1} \cdot n^{\beta-2} \ln n \le n^\beta F_n(3) \le \underbrace{\frac{c_2 \ln(1+n^3)}{\ln n^3}}_{\to c_2} \cdot n^{\beta-2} \ln n\,,$$

$n \mapsto n^{\beta-2} \ln n$ ha sempre limite o 0 o $+\infty$ per qualunque $\beta \in \mathbb{R}$ (regola de L'Hôpital).

Approfondimento. La successione $n \mapsto n^2 F_n(3)/\ln(1+n^3)$ ha limite 1/3 per $n \to +\infty$?La formula

$$\frac{1}{1+(nx)^\alpha} = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(-1)^k}{(nx)^{\alpha(k+1)}} + \frac{(-1)^N (nx)^{-N\alpha}}{1+(nx)^\alpha}$$

si ricava prima raccogliendo $(nx)^\alpha$ al denominatore

$$\frac{1}{1+(nx)^\alpha} = \frac{1}{(nx)^\alpha} \cdot \frac{1}{1+(nx)^{-\alpha}}\,,$$

e poi applicando la formula della somma della progressione geometrica:

$$\frac{1}{1+r} = \frac{1}{1-(-r)} = \sum_{k=0}^{N-1} (-r)^k + \frac{(-r)^N}{1-(-r)}$$

con $r = (nx)^{-\alpha}$:

$$\frac{1}{1+(nx)^\alpha} = \frac{1}{(nx)^\alpha} \cdot \left(\sum_{k=0}^{N-1} (-(nx)^{-\alpha})^k + \frac{(-(nx)^{-\alpha})^N}{1+(nx)^{-\alpha}} \right).$$

Applichiamo la formula al nostro integrando:

$$F_n(\alpha) = \int_0^1 nx \left(\sum_{k=0}^{N-1} \frac{(-1)^k}{(nx)^{\alpha(k+1)}} + \frac{(-1)^N (nx)^{-N\alpha}}{1+(nx)^\alpha} \right) \operatorname{sen} x \, dx\,.$$

Attenzione: prima di portare la sommatoria fuori dal segno di integrale dobbiamo assicurarci che i singoli addendi siano o positivi (che *non* è il nostro caso) o siano in L^1. Qui il possibile ostacolo all'integrabilità è l'andamento per $x \to 0^+$. Ci conviene scrivere $\operatorname{sen} x$ come $x((\operatorname{sen} x)/x)$, in quanto $(\operatorname{sen} x)/x$ è limitato:

$$\begin{aligned} F_n(\alpha) &= \int_0^1 nx \left(\sum_{k=0}^{N-1} \frac{(-1)^k}{(nx)^{\alpha(k+1)}} + \frac{(-1)^N (nx)^{-N\alpha}}{1+(nx)^\alpha} \right) x \frac{\operatorname{sen} x}{x} \, dx = \\ &= \int_0^1 nx \left(\sum_{k=0}^{N-1} \frac{(-1)^k}{(nx)^{\alpha(k+1)}} + \frac{(-1)^N (nx)^{-N\alpha}}{1+(nx)^\alpha} \right) x \frac{\operatorname{sen} x}{x} \, dx = \\ &= \frac{1}{n} \int_0^1 (nx)^2 \left(\sum_{k=0}^{N-1} \frac{(-1)^k}{(nx)^{\alpha(k+1)}} + \frac{(-1)^N (nx)^{-N\alpha}}{1+(nx)^\alpha} \right) \frac{\operatorname{sen} x}{x} \, dx = \\ &= \frac{1}{n} \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k (nx)^{2-\alpha(k+1)} \frac{\operatorname{sen} x}{x} + \frac{(-1)^N (nx)^{2-N\alpha}}{1+(nx)^\alpha} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \right) dx\,. \end{aligned}$$

Gli addendi della sommatoria sono tutti in $L^1([0,1])$ se $2-\alpha(k+1) > -1$ per ogni $k = 0, \ldots, N-1$, mentre l'ultimo addendo lo è se $2 - N\alpha > -1$. Le condizioni sono tutte verificate quando $\alpha < 3/N$, e quindi per tali valori di α possiamo scrivere, fattorizzando le potenze di n fuori dall'integrale:

$$\begin{aligned}
F_n(\alpha) &= \frac{1}{n}\left(\sum_{k=0}^{N-1}\int_0^1 (-1)^k (nx)^{2-\alpha(k+1)}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx + \int_0^1 \frac{(-1)^N (nx)^{2-N\alpha}}{1+(nx)^\alpha}\cdot\frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx\right) = \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{N-1}(-1)^k n^{2-\alpha(k+1)}\int_0^1 x^{2-\alpha(k+1)}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx + \frac{(-1)^N}{n}\int_0^1 \frac{(nx)^{2-N\alpha}}{1+(nx)^\alpha}\cdot\frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} n^{1-\alpha(k+1)}\cdot \underbrace{(-1)^k\int_0^1 x^{2-\alpha(k+1)}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx}_{:=a_k(\alpha)} + \frac{(-1)^N}{n}\int_0^1 \frac{(nx)^{2-N\alpha}}{1+(nx)^\alpha}\cdot\frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} a_k(\alpha) n^{1-\alpha(k+1)} + \frac{(-1)^N}{n}\int_0^1 \frac{(nx)^{2-N\alpha}}{1+(nx)^\alpha}\cdot\frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = \\
&= a_0(\alpha)n^{1-\alpha} + \underbrace{\sum_{k=1}^{N-1} a_k(\alpha) n^{1-\alpha(k+1)}}_{=o(n^{1-\alpha})} + \underbrace{\frac{(-1)^N}{n}\int_0^1 \frac{(nx)^{2-N\alpha}}{1+(nx)^\alpha}\cdot\frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx}_{=:R_{N,n}(\alpha)}\,.
\end{aligned}$$

Ribadiamo che gli $a_k(\alpha)$ sono numeri finiti non nulli (perché gli integrali sono di funzioni > 0), e che sono indipendenti da n. Il nostro candidato β è il valore $1-\alpha$ che è a esponente nel primo addendo. Per dimostrare che è proprio lui bisogna vedere se l'ultimo addendo $R_{N,n}(\alpha)$ è $o(n^{1-\alpha})$. Facciamo il cambio di variabile $y = nx$:

$$\begin{aligned}
R_{N,n}(\alpha) &= \frac{(-1)^N}{n}\int_0^1 \frac{(nx)^{2-N\alpha}}{1+(nx)^\alpha}\cdot\frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = \frac{(-1)^N}{n}\int_0^n \frac{y^{2-N\alpha}}{1+y^\alpha}\frac{\operatorname{sen}(y/n)}{y/n}\cdot\frac{dy}{n} = \\
&= \frac{(-1)^N}{n^2}\int_0^{+\infty}\frac{y^{2-N\alpha}}{1+y^\alpha}\frac{\operatorname{sen}(y/n)}{y/n}\chi_{]0,n[}(y)\,dy
\end{aligned}$$

Valutiamo l'ultimo integrando:

$$\sup_{n>0}\left|\frac{y^{2-N\alpha}}{1+y^\alpha}\frac{\operatorname{sen}(y/n)}{y/n}\chi_{]0,n[}(y)\right| \le \frac{y^{2-N\alpha}}{1+y^\alpha}c_2\,.$$

Il secondo membro è in $L^1(]0,+\infty[)$ se $2-N\alpha > -1$ e $\alpha-(2-N\alpha) > 1$, cioè quando $3/(N+1) < \alpha < 3/N$. In tal caso

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{y^{2-N\alpha}}{1+y^\alpha}\frac{\operatorname{sen}(y/n)}{y/n}\chi_{]0,n[}(y)\,dy = \int_0^{+\infty}\left(\lim_{n\to+\infty}\frac{y^{2-N\alpha}}{1+y^\alpha}\frac{\operatorname{sen}(y/n)}{y/n}\chi_{]0,n[}(y)\right)dy = \int_0^{+\infty}\frac{y^{2-N\alpha}}{1+y^\alpha}\,dy\,,$$

che è un numero reale (finito). Se $\alpha = 3/(N+1)$ l'integrale può divergere, ma non troppo velocemente. Infatti possiamo lo stesso valutarlo spezzandolo nella somma degli integrali su $]0,1]$ e su $]1,+\infty[$:

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^{+\infty}\frac{y^{2-N\alpha}}{1+y^\alpha}\frac{\operatorname{sen}(y/n)}{y/n}\chi_{]0,n[}(y)\,dy\right| &= \left|\int_0^{+\infty}\frac{y^{2-3N/(N+1)}}{1+y^{3/(N+1)}}\cdot\frac{\operatorname{sen}(y/n)}{y/n}\chi_{]0,n[}(y)\,dy\right| \le \\
&\le c_2\int_0^1 y^{-1+3/(N+1)}\,dy + c_2\int_1^n \frac{y^{-1+3/(N+1)}}{y^{3/(N+1)}}dy = \\
&= c_2\frac{1}{3/(N+1)}\,dy + c_2\int_1^n \frac{1}{y}dy = c_2\frac{N+1}{3} + c_2\ln n\,.
\end{aligned}$$

Riassumendo, se $3/(N+1) \le \alpha < 3/N$ abbiamo

$$R_{N,n}(\alpha) = \frac{(-1)^N}{n}\int_0^1 \frac{(nx)^{2-N\alpha}}{1+(nx)^\alpha}\cdot\frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = \frac{O(\ln n)}{n^2} \qquad \text{per } n\to+\infty\,.$$

Quindi, prendendo $\beta = \alpha - 1$,

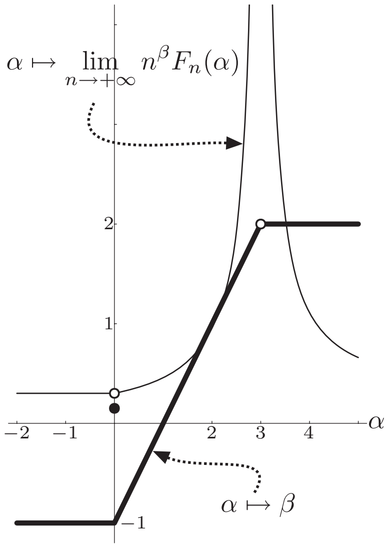
$$n^{\alpha-1} F_n(\alpha) = a_0(\alpha) + o(1) + O(\ln n) n^{\alpha-3} \qquad \text{per } n \to +\infty\,.$$

Poiché $\alpha < 3$ possiamo davvero prendere $\beta = \alpha - 1$ per tutti gli α in $[3/(N+1), 3/N[$. Essendo $N \geq 1$ arbitrario, abbiamo che

$$\beta = \alpha - 1 \qquad \forall \alpha \in\,]0, 3[\,,$$

e che

$$\lim_{n\to+\infty} n^{\alpha-1} F_n(\alpha) = a_0(\alpha) = \int_0^1 x^{2-\alpha} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx \qquad \forall \alpha \in\,]0, 3[\,.$$



Concludendo:

$$\beta = \begin{cases} -1 & \text{se } \alpha \leq 0, \\ \alpha - 1 & \text{se } 0 < \alpha < 2, \\ 2 & \text{se } \alpha > 2, \end{cases}$$

$$\lim_{n\to+\infty} n^{\beta} F_n(\alpha) = \begin{cases} \operatorname{sen} 1 - \cos 1 & \text{se } \alpha < 0, \\ (\operatorname{sen} 1 - \cos 1)/2 & \text{se } \alpha = 0, \\ \int_0^1 x^{2-\alpha} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx & \text{se } 0 < \alpha < 3, \\ \int_0^{+\infty} \frac{y^2}{1+y^{\alpha}}\, dy & \text{se } \alpha > 3. \end{cases}$$