Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 1998/99

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Istituzioni di Analisi Superiore, primo modulo

Prova Scritta del 1 settembre 1999

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento di identità (se chiesto):

Tempo a disposizione: 3 ore.

1. Poniamo

$$f(x) := \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\,dt\,, \qquad h_n(x) := \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{x+k}$$

per $x > 0$ e $n \in \mathbb{N}$, e sia Φ l'insieme delle funzioni $\varphi\colon]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ tali che $\varphi(x+1)+\varphi(x) = 1/x$ per ogni $x > 0$.

a. Dimostrare che c'è al più una $\varphi \in \Phi$ per la quale esiste (finito, $+\infty$ o $-\infty$) il limite di $\varphi(x)$ per $x \to +\infty$.

b. Dimostrare che f è ben definita e decrescente su $]0,+\infty[$, continua (almeno) su $]1,+\infty[$, $f \in \Phi$, e $1/(2x) \le f(x) \le 1/x$ per ogni $x > 0$. Trovare l'andamento di $f(x)$ e di $xf(x)$ per $x \to 0$ e per $x \to +\infty$. Cosa dire della derivabilità di f?

c. Per ogni $x > 0$ dimostrare che $f(x+n) = (-1)^n(f(x) - h_n(x))$ e che

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} h_n(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{x+k}\,.$$

2. Sia X uno spazio topologico di Hausdorff localmente compatto, $\varphi\colon X \to X$ un omeomorfismo, e $C_c(X)$ lo spazio vettoriale delle funzioni $X \to \mathbb{R}$ continue a supporto compatto. Dimostrare che se $f \in C_c(X)$ allora anche $f\circ\varphi \in C_c(X)$. Se $V \subseteq X$ e $f\colon \to \mathbb{R}$ diciamo che $f \prec V$ quando il supporto di f è contenuto in V e $1 \le f \le \chi_V$. Dimostrare che $f \prec \varphi(V)$ se e solo se $f\circ\varphi \prec V$. Sia poi $\Lambda\colon C_c(X) \to \mathbb{R}$ un funzionale lineare e positivo tale che $\Lambda(f\circ\varphi) = \Lambda(f)$ per ogni $f \in C_c(X)$. Siano $\mathcal{M}$ la σ-algebra contenente i boreliani di X, e μ la misura positiva su $\mathcal{M}$ fornite dal teorema di rappresentazione di Riesz in modo che $\Lambda(f) = \int_X f\,d\mu$ per ogni $f \in C_c(X)$. Dimostrare che se $E \in \mathcal{M}$ allora $\varphi(E) \in \mathcal{M}$ e $\mu(\varphi(E)) = \mu(E)$.

Punti: 5+10+10, 15

Università degli Studi di Udine   Anno Accademico 1998/99

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Istituzioni di Analisi Superiore, primo modulo

Prova Scritta del 1 settembre 1999

Svolgimento

1. a. Sia $\varphi \in \Phi$, cioè $\varphi\colon]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ sia una funzione tale che $\varphi(x+1)+\varphi(x) = 1/x$ per ogni $x > 0$. Supponiamo che $\varphi(x) \to \ell \in [-\infty,+\infty]$ per $x \to +\infty$. Allora passando al limite per $x \to +\infty$ nella identità $\varphi(x+1) + \varphi(x) = 1/x$ si ottiene $\ell + \ell = 0$, che è soddisfatta soltanto per $\ell = 0$. Necessariamente quindi il limite è zero. Supponiamo ora che $\psi \in \Phi$ abbia pure limite (necessariamente nullo) a $+\infty$. Sottraendo membro a membro le identità

$$\varphi(x+1)+\varphi(x) = 1/x \qquad \text{e} \qquad \psi(x+1)+\psi(x) = 1/x$$

si ottiene

$$\varphi(x+1) - \psi(x+1) = \psi(x) - \varphi(x) = -\big(\varphi(x) - \psi(x)\big)\,.$$

Riscrivendo quest'ultima uguaglianza con $x+1$ al posto di x si ricava

$$\varphi(x+2) - \psi(x+2) = -\big(\varphi(x+1) - \psi(x+1)\big) = \varphi(x) - \psi(x)\,.$$

Ripetendo il trucco per n volte si ricava

$$\varphi(x+n) - \psi(x+n) = (-1)^n\big(\varphi(x) - \psi(x)\big) \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x > 0\,,$$

o anche, moltiplicando per $(-1)^n$,

$$(-1)^n\big(\varphi(x+n) - \psi(x+n)\big) = \varphi(x) - \psi(x) \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x > 0\,.$$

Per $n \to +\infty$ il primo membro tende a 0 per quanto già visto. Quindi

$$\varphi(x) - \psi(x) = 0 \qquad \forall x > 0\,,$$

cioè φ e ψ coincidono.

b. Consideriamo l'integrando

$$g(t,x) := \frac{t^{x-1}}{1+t}\,.$$

Il denominatore è continuo (quindi misurabile) e positivo per $t \in [0,1]$, e non dà problemi. Il numeratore è pure continuo e positivo per $t \in\,]0,1]$ indipendentemente dal valore di x. Possiamo già dire quindi che l'integrale

$$f(x) := \int_{]0,1]} g(t,x)\,dt$$

ha senso ed è > 0 in quanto integrale di una funzione misurabile positiva. Quando l'esponente $x-1$ è negativo l'integranda $g(t,x)$ diverge per $t \to 0^+$, però per $x > 0$ la $f(x)$ è finita:

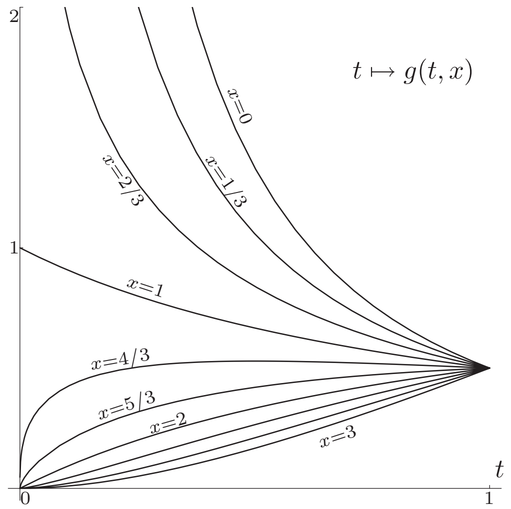
$$0 \le f(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\,dt \le \int_0^1 t^{x-1}\,dt = \left[\frac{t^x}{x}\right]_{t=0}^1 = \frac{1}{x} < +\infty \qquad \text{se } x > 0\,.$$

Possiamo scrivere per $t > 0$

$$g(t,x) = \frac{e^{(x-1)\ln t}}{1+t}\,,$$

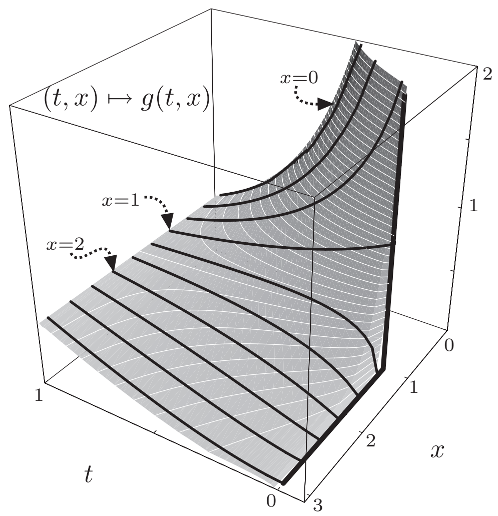
da cui si vede che la funzione $x \mapsto g(t,x)$ è decrescente quando $t \in \,]0,1[$ (infatti $\ln t < 0$). Quindi anche $x \mapsto f(x)$ è decrescente.

La $g(t,x)$ è certamente continua nella coppia (t,x) su $]0,1] \times [1,+\infty[$ in quanto funzione elementare. Si può poi maggiorare



$$\sup_{x\ge c}\bigl|g(t,x)\bigr| = g(t,c) = \frac{t^{c-1}}{1+t} \le t^{c-1} \in L^1\bigl(]0,1]\bigr)$$

per ogni $c > 0$ fissato. Quindi f risulta continua su $]0,+\infty[$ per risultati generali sugli integrali dipendenti da un parametro, che però non sono stati svolti a lezione nel corso del primo modulo. Se ci si limita a usare senza modifiche i risultati (dimostrati nel primo modulo) riguardanti l'integrazione su intervalli compatti di funzioni continue nella coppia, dimostrare la continuità di f si incontra una difficoltà: la g non è continua. Da una parte chiaramente $g(t,x)$ diverge per $t \to 0^+$ se $x < 1$. Inoltre $g(t,x)$ non ha limite nel punto $(t,x) = (0,1)$: il numeratore è una classica forma indeterminata; dal grafico tridimensionale di g si vede che le curve di livello (in bianco) hanno tutte un'estremità che tocca retta verticale $t = 0$, $x = 1$. (Attenzione a leggere il grafico in tre dimensioni: la prospettiva è un poco insolita, e la direzione dell'asse t è capovolta rispetto al grafico bidimensionale soprastante). La funzione $(t,x) \mapsto g(t,x)$ è però continua nella coppia su $[0,1] \times \,]1,+\infty[$, e quindi possiamo dedurre che f è continua almeno su $]1,+\infty[$.



Per scrupolo diamo rapidamente una dimostrazione che g è continua nei punti $(0,x)$ con $x > 0$. Consideriamo la funzione ausiliaria

$$r(a,b) := a^b = \begin{cases} e^{b\ln a} & \text{se } a > 0,\\ 0 & \text{se } a = 0,\end{cases}$$

che è certamente continua (composizione di funzioni elementari) su $]0,+\infty[\, \times \,]0,+\infty[$. Per dimostrare che è continua anche in ogni punto della forma $(0,\bar b)$ con $\bar b > 0$, prendiamo una successione $(a_n,b_n) \in \,]0,+\infty[\, \times \,]0,+\infty[$ tale che $(a_n,b_n) \to (0,\bar b)$ per $n \to +\infty$, e mostriamo che $g(a_n,b_n) \to g(0,\bar b) = 0$. Possiamo supporre che $a_n < 1$ per ogni n e che esista $\varepsilon > 0$ tale che $b_n > \varepsilon > 0$ per ogni n. Allora

$$\bigl|r(a_n,b_n) - r(0,\bar b)\bigr| = \bigl|e^{b_n \ln a_n} - 0\bigr| \le e^{\varepsilon \ln a_n} \to 0 \qquad \text{per } n \to +\infty\,.$$

Quindi r è continua su tutto $[0,+\infty[\, \times \,]0,+\infty[$. La nostra g si scrive anche come

$$g(t,x) = \frac{r(t,x-1)}{1+t}\,,$$

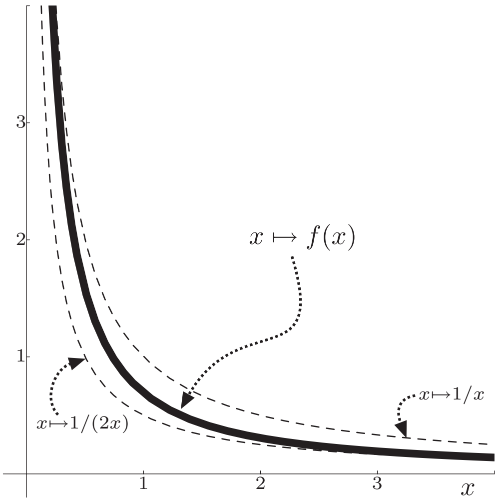
e risulta in effetti continua su $[0,1] \times \,]1,+\infty[$.

Si vede facilmente che $f \in \Phi$:

$$f(x+1) + f(x) = \int_0^1 \frac{t^x}{1+t}\,dt + \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\,dt = \int_0^1 \frac{t^x + t^{x-1}}{1+t}\,dt = \int_0^1 \frac{t^{x-1}(t+1)}{1+t}\,dt =$$
$$= \int_0^1 t^{x-1}\,dt = \Bigl[\frac{t^x}{x}\Bigr]_{t=0}^1 = \frac{1}{x} \qquad \forall x > 0\,.$$

Abbiamo già visto la disuguaglianza $f(x) \leq 1/x$. Per dimostrare che $f(x) \geq 1/(2x)$ integriamo per parti:

$$f(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\,dt = \Big[\frac{t^x}{x}\cdot\frac{1}{1+t}\Big]_{t=0}^1 - \int_0^1 \frac{t^x}{x}\Big(-\frac{1}{(1+t)^2}\Big)dt = \frac{1}{2x} + \int_0^1 \underbrace{\frac{t^x}{x(1+t)^2}}_{\geq 0}\,dt \geq \frac{1}{2x}\,.$$



Dalle disuguaglianze $1/x \leq f(x) \leq 1/(2x)$ segue ora subito che

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty\,, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0\,.$$

Per trovare l'andamento di $xf(x)$ ricicliamo l'integrazione per parti di sopra:

$$xf(x) = \frac{1}{2} + \int_0^1 \frac{t^x}{(1+t)^2}\,dt\,.$$

L'ultimo integrando è limitato:

$$\Big|\frac{t^x}{(1+t)^2}\Big| \leq 1 \qquad \forall x>0 \quad \forall t\in[0,1]\,,$$

e l'intervallo di integrazione è limitato pure, quindi per il teorema della convergenza dominata possiamo passare al limite in x sotto il segno di integrale:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to0^+} xf(x) &= \frac{1}{2} + \int_{]0,1]}\Big(\lim_{x\to0^+}\frac{t^x}{(1+t)^2}\Big)\,dt = \frac{1}{2} + \int_{]0,1]}\frac{1}{(1+t)^2}\,dt = \frac{1}{2} + \Big[-\frac{1}{1+t}\Big]_{t=0}^1 = \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{1+1} + \frac{1}{1+0} = 1\,,\\
\lim_{x\to+\infty} xf(x) &= \frac{1}{2} + \int_{]0,1]}\Big(\lim_{x\to+\infty}\frac{t^x}{(1+t)^2}\Big)\,dt = \frac{1}{2} + \int_{]0,1]} 0\,dt = \frac{1}{2}\,.
\end{aligned}$$

Per $x \to 0^+$ quindi $f(x) = 1/x + o(1/x)$, mentre $f(x) = 1/(2x) + o(1/x)$ per $x \to +\infty$, risultati che si accordano con la figura del grafico di f. La derivata parziale di $g(t,x)$ rispetto a x è

$$\frac{\partial g}{\partial x}(t,x) = \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{e^{(x-1)\ln t}}{1+t} = \dfrac{e^{(x-1)\ln t}\ln t}{1+t} = \dfrac{t^{x-1}\ln t}{1+t} & \text{per } t>0,\\ \dfrac{\partial}{\partial x}0 = 0 & \text{per } t=0. \end{cases}$$

Questa derivata è continua su $]0,1]\times]0,+\infty[$ in quanto funzione elementare. Anzi, poiché è semplicemente il prodotto di g per il $\ln t$, il suo valore assoluto è decrescente rispetto a x e possiamo maggiorare facilmente

$$\sup_{x\geq c}\Big|\frac{\partial g}{\partial x}(t,x)\Big| = \Big|\frac{\partial g}{\partial x}(t,c)\Big| = \frac{t^{c-1}\,|\ln t|}{1+t} \leq \underbrace{t^{-1+c/2}}_{\in L^1}\cdot\underbrace{t^{c/2}\,|\ln t|}_{\text{limitato}}\,,$$

e l'ultimo membro è una funzione di $L^1(]0,1])$, in quanto $-1+c/2 > -1$ e $t \mapsto t^{c/2}\,|\ln t|$ è limitata su $]0,1]$ (ha limite nullo per $t\to0^+$. Dunque f è derivabile su $]0,+\infty[$.

Come prima, se ci limitiamo a usare i teoremi sugli integrali su intervalli compatti dobbiamo accontentarci del caso $x>1$, perché $\partial g/\partial x$ è continua soltanto su $[0,1]\times]1,+\infty[$. Un modo per vederlo è di prendere $c>0$ qualsiasi e scrivere

$$\frac{\partial g}{\partial x}(t,x) = \left\{\begin{matrix} \frac{t^{x-c-1}}{1+t}t^c\,|\ln t| & \text{per } t>0\\ 0 & \text{per } t=0 \end{matrix}\right\} = \frac{r(t,x-c-1)}{1+t}h(t)\,, \qquad \text{dove} \quad h(t) := \begin{cases} t^c\ln t & \text{se } t>0,\\ 0 & \text{se } t=0, \end{cases}$$

e r è la funzione introdotta più sopra. Si vede subito (per esempio l'Hôpital) che h è continua su $[0,1]$. Da quanto sappiamo sulla continuità di r deduciamo che $\partial g/\partial x$ è continua su $[0,1]\times]1+c,+\infty[$ per ogni $c>0$, cioè su $[0,1]\times]1,+\infty[$. Ne segue che f è derivabile su $]1,+\infty[$.

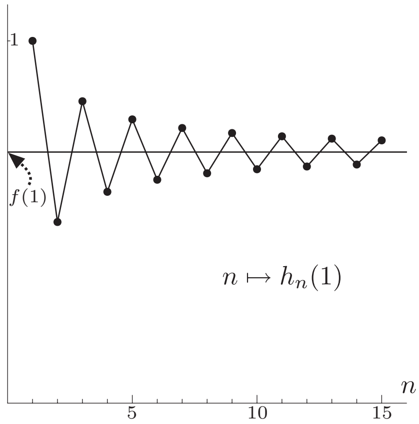
c. Dimostriamo per induzione che $f(x+n) = (-1)^n(f(x) - h_n(x))$ per ogni $x > 0$ e $n \geq 1$. Per $n = 1$ è semplicemente il fatto che $f \in \Phi$ (punto **a**):

$$f(x+1) = (-1)^1\big(f(x) - h_1(x)\big) \iff f(x+1) = -\Big(f(x) - \frac{(-1)^0}{x}\Big) \iff f(x+1) + f(x) = \frac{1}{x}\,.$$

Supponiamo che l'affermazione sia vera per un certo n e usiamo di nuovo il punto **a**:

$$f(x+n+1) + f(x+n) = \frac{1}{x+n}$$

da cui



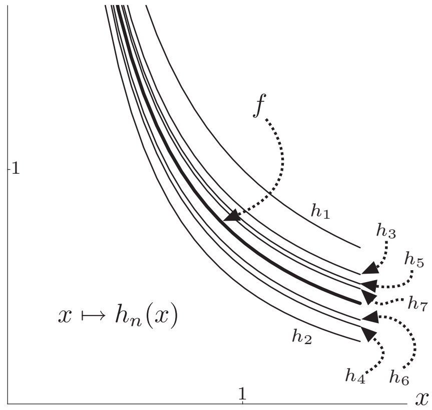
$$\begin{aligned} f(x+n+1) &= -f(x+n) + \frac{1}{x+n} = \\ &= -(-1)^n\big(f(x) - h_n(x)\big) + \frac{1}{x+n} = \\ &= (-1)^{n+1}\big(f(x) - h_n(x)\big) + \frac{(-1)^{2n+2}}{x+n} = \\ &= (-1)^{n+1}\Big(f(x) - h_n(x) + \frac{(-1)^{n+1}}{x+n}\Big) = \\ &= (-1)^{n+1}\bigg(f(x) - \Big(h_n(x) + \frac{(-1)^n}{x+n}\Big)\bigg) = \\ &= (-1)^{n+1}\big(f(x) - h_{n+1}(x)\big)\,, \end{aligned}$$

come volevasi dimostrare. Moltiplicando l'identità per $(-1)^n$ si ricava

$$(-1)^n f(x+n) = f(x) - h_n(x)\,,$$

cioè

$$h_n(x) = f(x) - (-1)^n f(x+n)\,.$$



Ricordando che $f(x) \to 0$ per $x \to +\infty$, deduciamo che esiste il limite per $n \to +\infty$ del secondo membro dell'ultima uguaglianza e quindi anche il primo membro ha limite e si ha

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{x+k} = \lim_{n\to+\infty} h_n(x) = f(x)\,.$$

In realtà il fatto che $h_n(x)$ abbia limite finito per $n \to +\infty$ si può anche ricavare dalla teoria delle serie a segno alterno (teorema di Leibniz), in quanto la successione $k \mapsto 1/(x+k)$ è positiva, decrescente e infinitesima per $k \to +\infty$ per ogni $x > 0$ fissato.

Problema. Dimostrare direttamente (con la teoria delle serie) che se definiamo $h(x) := \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k/(x+k)$ si ha che $h \in \Phi$ e che $h(x)$ è infinitesima per $x \to +\infty$. Dedurre allora che $f = h$ usando il punto **a**.

2. Sia $f \in C_c(X)$. Allora

$$\forall x \in X \qquad x \in \{f \circ \varphi \neq 0\} \iff (f \circ \varphi)(x) \neq 0 \iff \varphi(x) \in \{f \neq 0\} \iff x \in \varphi^{-1}\big(\{f \neq 0\}\big)\,,$$

cioè

$$\{f \circ \varphi \neq 0\} = \varphi^{-1}\big(\{f \neq 0\}\big)\,,$$

da cui, poiché φ^{-1} è un omeomorfismo,

$$\overline{\{f \circ \varphi \neq 0\}} = \overline{\varphi^{-1}\big(\{f \neq 0\}\big)} = \varphi^{-1}\big(\,\overline{\{f \neq 0\}}\,\big)\,,$$

ossia

$$\operatorname{supp}(f \circ \varphi) = \varphi^{-1}(\operatorname{supp} f)\,.$$

Dunque f ha supporto compatto se e solo se $f \circ \varphi$ ha supporto compatto. Essendo φ e φ^{-1} continue, $f = (f \circ \varphi) \circ \varphi^{-1}$ è continua se e solo se $f \circ \varphi$ è continua. Tirando le fila, $f \in C_c(X)$ se e solo se $f \circ \varphi \in C_c(X)$. Siano ora $f\colon X \to \mathbb{R}$ e $V \subseteq X$, e supponiamo che $f \prec \varphi(V)$, cioè $f \in C_c(X)$ tale che $\operatorname{supp} f \subseteq \varphi(V)$ e $0 \le f \le \chi_{\varphi(V)}$. Da una parte, per quanto visto prima

$$\operatorname{supp}(f \circ \varphi) = \varphi^{-1}(\operatorname{supp} f) \subseteq \varphi^{-1}\big(\varphi(V)\big) = V\,,$$

e, calcolando i tre membri di $0 \le f \le \chi_{\varphi(V)}$ in $\varphi(x)$ si ottiene

$$0 \le (f \circ \varphi)(x) \le \chi_{\varphi(V)} \circ \varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } \varphi(x) \in \varphi(V), \text{ cioè se } x \in V, \\ 0 & \text{se } \varphi(x) \in X \setminus \varphi(V), \text{ cioè se } x \in X \setminus V, \end{cases}$$

ossia $0 \le f \circ \varphi \le \chi_V$. Insomma,

$$f \prec \varphi(V) \iff f \circ \varphi \prec V\,.$$

Osserviamo che Λ ha lo stesso valore non solo su f e su $f \circ \varphi$, ma anche su $f \circ \varphi^{-1}$. Infatti

$$\Lambda(f) = \Lambda\big(\underbrace{(f \circ \varphi^{-1})}_{\in C_c(X)} \circ \varphi\big) = \Lambda(f \circ \varphi^{-1})\,.$$

Se $E = V$ è un aperto di X, anche $\varphi(V)$ è un aperto perché φ è un omeomorfismo, e quindi è in $\mathcal{M}$. La misura degli aperti nel teorema di Riesz è data dalla formula

$$\mu(V) = \sup\big\{\Lambda(f) \ :\ f \prec V\big\}\,.$$

Quindi, usando la relazione $\Lambda(f) = \Lambda(f \circ \varphi)$,

$$\mu\big(\varphi(V)\big) = \sup\big\{\Lambda(f) \ :\ f \prec \varphi(V)\big\} = \big\{\Lambda(f) \ :\ f \circ \varphi \prec V\big\} = \big\{\Lambda(f \circ \varphi) \ :\ f \circ \varphi \prec V\big\}\,.$$

Al variare di $f \in C_c(X)$ la $f \circ \varphi$ descrive tutti e soli gli elementi di $C_c(X)$. Quindi

$$\mu\big(\varphi(V)\big) = \big\{\Lambda(f \circ \varphi) \ :\ f \circ \varphi \prec V\big\} = \big\{\Lambda(g) \ :\ g \prec V\big\} = \mu(V)\,.$$

La funzione μ è definita su ogni sottinsieme $E \subseteq X$ come

$$\mu(E) := \inf\big\{\mu(V) \ :\ V \text{ è aperto e contiene } E\big\}\,.$$

Poiché φ è un omeomorfismo, V è aperto e contiene E se e solo se $\varphi(V)$ è aperto e contiene $\varphi(E)$. Quindi

$$\begin{aligned} \mu(E) &= \inf\big\{\mu(V) \ :\ V \text{ è aperto e contiene } E\big\} = \\ &= \inf\big\{\mu(V) \ :\ \varphi(V) \text{ è aperto e contiene } \varphi(E)\big\} = \\ &= \inf\big\{\mu\big(\varphi(V)\big) \ :\ \varphi(V) \text{ è aperto e contiene } \varphi(E)\big\} = \\ &= \inf\big\{\mu(W) \ :\ W \text{ è aperto e contiene } \varphi(E)\big\} = \\ &= \mu\big(\varphi(E)\big)\,. \end{aligned}$$

Resta solo da dimostrare che $E \in \mathcal{M}$ implica $\varphi(E) \in \mathcal{M}$. Ricordiamo che

$$\mathcal{M}_F := \Big\{E \subseteq X \ :\ \mu(E) = \sup\big\{\mu(K) \ :\ K \text{ compatto contenuto in } E\big\} < +\infty\Big\}\,,$$

$$\mathcal{M} := \Big\{E \subseteq X \ :\ E \cap K \in \mathcal{M}_F \text{ per ogni } K \text{ compatto in } X\Big\}\,.$$

Ora K è un compatto contenuto in E se e solo se $\varphi(K)$ è un compatto contenuto in $\varphi(E)$. Quindi

$$\begin{aligned}E \in \mathcal{M}_F \iff & \ \mu(E) = \sup\big\{\mu(K) \ : \ K \text{ compatto contenuto in } E\big\} < +\infty \iff \\ \iff & \ \mu\big(\varphi(E)\big) = \sup\big\{\mu\big(\varphi(K)\big) \ : \ \varphi(K) \text{ compatto contenuto in } \varphi(E)\big\} < +\infty \iff \\ \iff & \ \mu\big(\varphi(E)\big) = \sup\big\{\mu(\tilde{K})) \ : \ \tilde{K} \text{ compatto contenuto in } \varphi(E)\big\} < +\infty \iff \\ \iff & \ \varphi(E) \in \mathcal{M}_F \,.\end{aligned}$$

Poiché K è compatto se e solo se $\varphi(K)$ è compatto perché φ è omeomorfismo, e inoltre $\varphi(E \cap K) = \varphi(E) \cap \varphi(K)$ perché φ è biiettiva, per cui possiamo concludere:

$$\begin{aligned}E \in \mathcal{M} \iff & \Big(E \cap K \in \mathcal{M}_F \quad \forall K \text{ compatto in } X\Big) \iff \\ \iff & \Big(\varphi(E \cap K) \in \mathcal{M}_F \quad \forall K \text{ compatto in } X\Big) \iff \\ \iff & \Big(\varphi(E) \cap \varphi(K) \in \mathcal{M}_F \quad \forall \varphi(K) \text{ compatto in } X\Big) \iff \\ \iff & \Big(\varphi(E) \cap \tilde{K} \in \mathcal{M}_F \quad \forall \tilde{K} \text{ compatto in } X\Big) \iff \\ \iff & \ \varphi(E) \in \mathcal{M} \,.\end{aligned}$$