Università degli Studi di Udine Anno Accademico 1998/99

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Istituzioni di Analisi Superiore, primo modulo

Prova Scritta del 15 aprile 1999

Cognome e Nome:

Matricola: Documento di identità (se chiesto):

Tempo a disposizione: 3 ore.

1. Sia $(X, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura positiva, Y uno spazio normato, $f\colon X \times Y \to \mathbb{R}$ una funzione tale che per ogni $t \in X$ la funzione $y \mapsto f(t, y)$ sia differenziabile con continuità, e che per ogni $y \in Y$ la funzione $t \mapsto f(t, y)$ sia $\mathcal{M}$-misurabile e in $L^1(\mu)$. Poniamo $F(y) := \int_X f(t, y)\, d\mu(t)$ per $y \in Y$.

a. Dimostrare che per ogni $y_0, h \in Y$ la funzione $t \mapsto \partial_y f(t, y_0)[h]$ è $\mathcal{M}$-misurabile. (Scrivere $\partial_y f(t, y_0)[h]$ come limite di un rapporto incrementale).

b. Supponiamo che per ogni $y, h \in Y$ la funzione $t \mapsto \partial_y f(t, y)[h]$ sia in $L^1(\mu)$. Dimostrare che allora per ogni $y_0, h \in Y$ si ha

$$F(y_0 + h) - F(y_0) = \int_X \partial_y f(t, y_0)[h]\, d\mu(t) + \\ + \int_X d\mu(t) \left(\int_{[0,1]} \Big(\partial_y f(t, y_0 + \theta h)[h] - \partial_y f(t, y_0)[h] \Big)\, d\theta \right).$$

(Teorema fondamentale del calcolo e differenziale delle funzioni composte).

c. Sia U un aperto convesso di Y e supponiamo che la funzione $t \mapsto \sup_{y \in U} \|\partial_y f(t, y)\|$ sia in $L^1(\mu)$ (la norma è quella operatoriale). Dimostrare che allora F è differenziabile con continuità su U e $\partial_y F(y_0)[h] = \int_X \partial_y f(t, y_0)[h]\, d\mu(t)$ per ogni $y_0 \in U$, $h \in Y$.

2. Siano $(X, \mathcal{M})$ uno spazio misurabile ed (Y, d) uno spazio metrico. Si dice che la funzione $f\colon X \to Y$ è misurabile se $f^{-1}(V) \in \mathcal{M}$ per ogni V aperto in Y. Sia S l'insieme delle funzioni $s\colon X \to Y$ semplici (nel senso che $s(X)$ è un insieme finito) e misurabili.

a. Sia $f_n\colon X \to Y$ una successione di funzioni misurabili che converge puntualmente a una funzione $f\colon X \to Y$ su tutto X. Dimostrare che allora anche f è misurabile. (Posto $\operatorname{dist}(y, E) := \inf\{d(y, y') \mid y' \in E\}$ per $y \in Y$ e $\varnothing \neq E \subset Y$, dimostrare che $|d(y_1, E) - d(y_2, E)| \le d(y_1, y_2)$ per ogni $y_1, y_2 \in Y$, e che $y \mapsto d(y, E)$ è continua. Poi quando $V \subsetneqq Y$ è aperto esprimere la condizione $f(x) \in V$ in termini di $\operatorname{dist}(f(x), Y \setminus V)$).

b. Supponiamo che $f\colon X \to Y$ sia misurabile e che Y sia separabile, cioè che esista una sottinsieme al più numerabile $\{y_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ denso in Y. Per ogni $x \in X$ e $k \in \mathbb{N}$ poniamo $\varphi_k(x) := \min\{i \in \mathbb{N} \mid d(f(x), y_i) \le d(f(x), y_j)\ \forall j = 0, \dots, k\}$. Dimostrare che per ogni k la funzione φ_k è ben definita, che la funzione $s_k(x) := y_{\varphi_k(x)}$ è in S, e che la successione di funzioni s_k converge puntualmente a f su tutto X.

Punti: 5+5+10, 10+10

Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 1998/99

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Istituzioni di Analisi Superiore, primo modulo

Prova Scritta del 15 aprile 1999

Svolgimento

1. Dire che per ogni $t \in X$ la funzione $y \mapsto f(t, y)$ è differenziabile significa che per ogni $t \in X$ e $y_0 \in Y$ esiste un'applicazione lineare continua $L_{t,y_0}: Y \to Y$ tale che

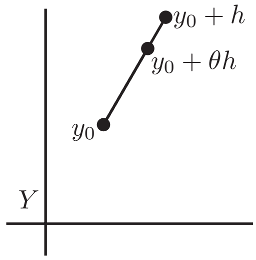
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(t, y_0 + h) - f(t, y_0) - L_{t,y_0}(h)}{\|h\|} = 0 .$$

Useremo la notazione $L_{t,y_0}(h) =: \partial_y f(t, y_0)[h]$. Dire che $y \mapsto f(t, y)$ è differenziabile "con continuità" significa che per ogni $t \in X$ l'applicazione $y_0 \mapsto L_{t,y_0}$ è continua come funzione da Y nello spazio degli operatori lineari continui $Y \to Y$ con la norma operatoriale. Nel caso particolare in cui $Y = \mathbb{R}^n$, "differenziabile con continuità" equivale a dire che per ogni $t \in X$ esistono le derivate parziali delle componenti di f

$$\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(t, y_1, \dots y_n)$$

e che sono funzioni continue della n-upla $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

a. Sappiamo che il differenziale di una funzione calcolato nell'incremento h coincide con la *derivata direzionale* della funzione in quella direzione. Quindi per ogni $t \in X$, $y_0, h \in Y$ abbiamo



$$\partial_y f(t, y_0)[h] = \lim_{\theta \to 0} \frac{f(t, y_0 + \theta h) - f(t, y_0)}{\theta} .$$

Calcoliamo il limite lungo una qualsiasi successione θ_n che tenda a 0 senza mai annullarsi, per esempio $\theta_n := 1/n$:

$$\partial_y f(t, y_0)[h] = \lim_{n \to +\infty} \frac{f(t, y_0 + h/n) - f(t, y_0)}{1/n} .$$

Poniamo

$$g_n(t, y_0, h) := \frac{f(t, y_0 + h/n) - f(t, y_0)}{1/n} .$$

Per ogni y_0, h fissati, la funzione a valori reali $t \mapsto g_n(t, y_0, h)$ è $\mathcal{M}$-misurabile perché combinazione lineare delle funzioni misurabili per ipotesi $t \mapsto f(t, y_0 + h/n)$ e $t \mapsto f(t, y_0)$. Dunque per ogni y_0, h fissati la funzione

$$t \mapsto \partial_y f(t, y_0)[h] = \lim_{n \to +\infty} g_n(t, y_0, h)$$

è $\mathcal{M}$-misurabile perché limite puntuale di una successione di funzioni misurabili.

b. Per ogni $t \in X$, $y_0, h \in Y$ la funzione di variabile reale

$$\theta \mapsto \varphi(\theta) := f(t, y_0 + \theta h)$$

è composizione delle due funzioni $\theta \mapsto y_0 + \theta h$ e $y \mapsto f(t, y)$, entrambe differenziabili per ipotesi. Per la regola del differenziale delle funzioni composte la φ è derivabile e

$$\varphi'(\theta) = \frac{\partial}{\partial \theta} f(t, y_0 + \theta h) = \partial_y f(t, y_0 + \theta h)[h] .$$

L'ultimo membro dell'uguaglianza è una funzione continua di θ, in quanto composizione delle funzioni continue $\theta \mapsto y_0 + \theta h$ e $y \mapsto \partial_y f(t,y)[h]$. Quindi la funzione $\theta \mapsto f(t, y_0+\theta h)$ ha derivata continua, e possiamo applicare il teorema fondamentale del calcolo:

$$f(t,y_0+h) - f(t,y_0) = \varphi(1) - \varphi(0) = \int_0^1 \varphi'(\theta)\,d\theta = \int_0^1 \partial_y f(t, y_0+\theta h)[h]\,d\theta\,.$$

Sotto il segno di integrale aggiungiamo e togliamo la quantità $\partial_y f(t,y_0)[h]$, che non dipende da θ:

$$\begin{aligned} f(t,y_0+h) - f(t,y_0) &= \int_0^1 \Big(\partial_y f(t,y_0+\theta h)[h] - \partial_y f(t,y_0)[h]\Big)\,d\theta + \int_0^1 \partial_y f(t,y_0)[h]\,d\theta = \\ &= \int_0^1 \Big(\partial_y f(t,y_0+\theta h)[h] - \partial_y f(t,y_0)[h]\Big)\,d\theta + \partial_y f(t,y_0)[h]\,. \end{aligned}$$

Per ipotesi per ogni $y_0, h \in Y$ le tre funzioni $t \mapsto f(t,y_0+h)$, $t \mapsto f(t,y_0)$ e $t \mapsto \partial_y f(t,y_0)[h]$ sono in $L^1(\mu)$. Quindi anche la funzione

$$t \mapsto \int_0^1 \Big(\partial_y f(t,y_0+\theta h)[h] - \partial_y f(t,y_0)[h]\Big)\,d\theta = f(t,y_0+h) - f(t,y_0) - \partial_y f(t,y_0)[h]$$

è in $L^1(\mu)$. Integrandola su X si ottiene

$$\int_X \bigg(\int_0^1 \Big(\partial_y f(t,y_0+\theta h)[h] - \partial_y f(t,y_0)[h]\Big)\,d\theta\bigg) d\mu(t) = F(y_0+h) - F(y_0) - \int_X \partial_y f(t,y_0)[h]\,d\mu(t)\,,$$

cioè la formula richiesta.

c. L'applicazione

$$L_{y_0}(h) := \int_X \partial_y f(t,y_0)[h]\,d\mu(t)$$

è ovviamente lineare da Y in $\mathbb{R}$. Vediamo se è continua: per $y_0 \in U$ possiamo scrivere

$$\big\|\partial_y f(t,y_0)[h]\big\| \le \big\|\partial_y f(t,y_0)\big\| \cdot \|h\| \le \|h\| \cdot \sup_{y\in U}\big\|\partial_y f(t,y)\big\|\,,$$

da cui

$$\big|L_{y_0}(h)\big| = \left|\int_X \partial_y f(t,y_0)[h]\,d\mu(t)\right| \le \int_X \Big|\partial_y f(t,y_0)[h]\Big|\,d\mu(t) \le \|h\| \cdot \underbrace{\int_X \Big(\sup_{y\in U}\big\|\partial_y f(t,y)\big\|\Big) d\mu(t)}_{<+\infty}\,.$$

Dunque $L_{y_0}\colon Y \to \mathbb{R}$ è davvero continua, ed è una candidata ad essere il differenziale di $y \mapsto F(y)$. Prendiamo una successione $h_n \to 0$ mai nulla e vediamo se la quantità

$$\frac{F(y_0+h_n) - F(y_0) - L_{y_0}(h_n)}{\|h_n\|}$$

è infinitesima. Per il punto precedente questa quantità coincide con

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\|h_n\|}\int_X \bigg(\int_{[0,1]} \Big(\partial_y f(t,y_0+\theta h_n)[h_n] - \partial_y f(t,y_0)[h_n]\Big)\,d\theta\bigg) d\mu(t) = \\ &\qquad = \int_X \bigg(\int_{[0,1]} \big(\partial_y f(t,y_0+\theta h_n) - \partial_y f(t,y_0)\big)\Big[\frac{h_n}{\|h_n\|}\Big]\,d\theta\bigg) d\mu(t)\,. \end{aligned}$$

Poniamo

$$\psi_n(\theta,t) := \big(\partial_y f(t, y_0+\theta h_n) - \partial_y f(t,y_0)\big)\Big[\frac{h_n}{\|h_n\|}\Big]\,,$$

di modo che

$$\frac{F(y_0+h_n)-F(y_0)-L_{y_0}(h_n)}{\|h_n\|} = \int_X \bigg(\int_{[0,1]} \psi_n(\theta,t)\,d\theta\bigg)d\mu(t)\,.$$

Vogliamo dimostrare che questa quantità è infinitesima usando la convergenza dominata. Purtroppo non è chiarissimo se la funzione $(\theta,t) \mapsto \psi_n(\theta,t)$ sia misurabile rispetto allo spazio prodotto fra i misurabili secondo Lebesgue di $[0,1]$ ed $\mathcal{M}$ (punto da indagare per ulteriore **esercizio**). Quindi ci rassegnamo a lasciare l'integrale in forma iterata e applicare la convergenza dominata due volte. Per $t \in X$ fissato, per ipotesi la funzione $y \mapsto \partial_y f(t,y)$ è continua rispetto alla norma operatoriale. Poiché $y_0+\theta h_n \to y_0$ per $n \to +\infty$ per ogni $\theta \in [0,1]$,

$$\begin{aligned}
\big|\psi_n(\theta,t)\big| &= \bigg|\big(\partial_y f(t,y_0+\theta h_n) - \partial_y f(t,y_0)\big)\Big[\frac{h_n}{\|h_n\|}\Big]\bigg| \le \\
&\le \big\|\partial_y f(t,y_0+\theta h_n) - \partial_y f(t,y_0)\big\| \cdot \Big\|\frac{h_n}{\|h_n\|}\Big\| = \\
&= \big\|\partial_y f(t,y_0+\theta h_n) - \partial_y f(t,y_0)\big\| \longrightarrow 0 \qquad \text{per } n\to+\infty \quad \forall\theta\in[0,1]\,.
\end{aligned}$$

Dato che U è un intorno di y_0, per n abbastanza grande y_0+h_n appartiene a U, e visto che U è anche convesso, per ogni $\theta\in[0,1]$ anche $y_0+\theta h_n \in U$. Dunque per n grande e $\theta\in[0,1]$ possiamo maggiorare

$$\big|\psi_n(\theta,t)\big| \le \big\|\partial_y f(t,y_0+\theta h_n) - \partial_y f(t,y_0)\big\| \le 2\sup_{y\in U}\big\|\partial_y f(t,y)\big\|\,.$$

Per μ-quasi ogni $t\in X$ l'ultimo membro è un numero reale finito, indipendente da n. Per il teorema della convergenza dominata applicato all'integrale di Lebesgue rispetto a θ quindi

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{[0,1]}\psi_n(\theta,t)\,d\theta = \int_{[0,1]}\Big(\lim_{n\to+\infty}\psi_n(\theta,t)\Big)d\theta = 0 \qquad \text{per quasi ogni } t\in X\,.$$

Posto

$$\xi_n(t) := \int_{[0,1]}\psi_n(\theta,t)\,d\theta\,,$$

abbiamo che ξ_n è in $L^1(\mu)$ per quanto già detto, $\xi_n(t)\to 0$ per $n\to+\infty$ per μ-quasi ogni $t\in X$, e inoltre

$$|\xi_n(t)| \le \int_{[0,1]}\big|\psi_n(\theta,t)\big|\,d\theta \le 1\cdot 2\sup_{y\in U}\big\|\partial_y f(t,y)\big\|\,.$$

Quest'ultimo membro non dipende da n e per ipotesi è in $L^1(\mu)$. Dunque, di nuovo per il teorema della convergenza dominata, questa volta rispetto alla misura μ,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{F(y_0+h_n)-F(y_0)-L_{y_0}(h_n)}{\|h_n\|} = \lim_{n\to+\infty}\int_X \xi_n\,d\mu = \int_X\Big(\lim_{n\to+\infty}\xi_n\Big)d\mu = 0\,,$$

come volevasi dimostrare. Manca solo da verificare che il differenziale di F è continuo, cioè che la funzione $y_0\mapsto \partial_y F(y_0)$ è continua da U nello spazio degli operatori lineari $Y\to\mathbb{R}$. Sia $y_n\in U$ una successione che converge a $\bar y\in U$. Vogliamo dimostrare che la quantità

$$\big\|\partial_y F(y_n) - \partial_y F(\bar y)\big\| = \sup_{\substack{h\in Y\\ \|h\|\le 1}}\Big|\partial_y F(y_n)[h] - \partial_y F(\bar y)[h]\Big|$$

è infinitesima per $n \to +\infty$. Esplicitiamo le $\partial_y F$:

$$\begin{aligned}
\sup_{\substack{h\in Y\\ \|h\|\le 1}} \Bigl|\partial_y F(y_n)[h] - \partial_y F(\bar y)[h]\Bigr| &= \sup_{\substack{h\in Y\\ \|h\|\le 1}} \left|\int_X \partial_y f(t,y_n)[h]\,d\mu(t) - \int_X \partial_y f(t,\bar y)[h]\,d\mu(t)\right| = \\
&= \sup_{\substack{h\in Y\\ \|h\|\le 1}} \left|\int_X \bigl(\partial_y f(t,y_n) - \partial_y f(t,\bar y)\bigr)[h]\,d\mu(t)\right| \le \\
&\le \sup_{\substack{h\in Y\\ \|h\|\le 1}} \int_X \Bigl|\bigl(\partial_y f(t,y_n) - \partial_y f(t,\bar y)\bigr)[h]\Bigr|\,d\mu(t) \le \\
&\le \int_X \bigl\|\partial_y f(t,y_n) - \partial_y f(t,\bar y)\bigr\|\cdot 1\,d\mu(t)
\end{aligned}$$

Per ipotesi la funzione $y \mapsto \partial f(t,y)$ è continua, per cui

$$\bigl\|\partial_y f(t,y_n) - \partial_y f(t,\bar y)\bigr\| \longrightarrow 0 \qquad \text{per } n \to +\infty \text{ per ogni } t \in X\,.$$

D'altra parte

$$\bigl\|\partial_y f(t,y_n) - \partial_y f(t,\bar y)\bigr\| \le 2\sup_{y\in U}\bigl\|\partial_y f(t,y)\bigr\|\,,$$

e quest'ultima è una funzione di t indipendente da n e in $L^1(\mu)$ per ipotesi. Pertanto

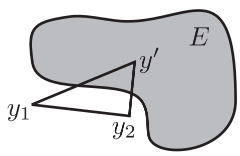
$$\begin{aligned}
\bigl\|\partial_y F(y_n) - \partial_y F(\bar y)\bigr\| &= \sup_{\substack{h\in Y\\ \|h\|\le 1}} \Bigl|\partial_y F(y_n)[h] - \partial_y F(\bar y)[h]\Bigr| \le \\
&\le \int_X \bigl\|\partial_y f(t,y_n) - \partial_y f(t,\bar y)\bigr\|\,d\mu(t) \longrightarrow 0 \quad \text{per } n \to +\infty\,.
\end{aligned}$$

2. a. Poniamo

$$\operatorname{dist}(y,E) := \inf\bigl\{d(y,y') \bigm| y' \in E\bigr\} \qquad \text{per } y \in Y \text{ e } \varnothing \ne E \subset Y\,.$$

La quantità $\operatorname{dist}(y,E)$ è sempre finita e ≥ 0 perché estremo inferiore di un insieme non vuoto di numeri reali ≥ 0. Dimostriamo che

$$\bigl|\operatorname{dist}(y_1,E) - \operatorname{dist}(y_2,E)\bigr| \le d(y_1,y_2) \qquad \forall y_1,y_2 \in Y\,.$$



Infatti per la disuguaglianza triangolare

$$d(y_1,y') \le d(y_1,y_2) + d(y_2,y') \qquad \forall y' \in E\,,$$

da cui, passando all'estremo inferiore al variare di $y' \in E$ si ottiene

$$\operatorname{dist}(y_1,E) \le d(y_1,y_2) + \operatorname{dist}(y_2,E)\,, \quad \text{cioè} \quad \operatorname{dist}(y_1,E) - \operatorname{dist}(y_2,E) \le d(y_1,y_2)\,.$$

Scambiando ruolo fra y_1 e y_2 si ottiene

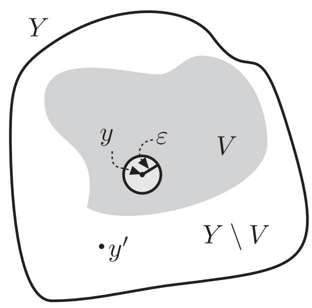
$$\operatorname{dist}(y_2,E) - \operatorname{dist}(y_1,E) \le d(y_2,y_1)\,,$$

che insieme alla disuguaglianza precedente dimostra quella col valore assoluto. Possiamo dedurre che la funzione $y \mapsto \operatorname{dist}(y,E)$ è (uniformemente) continua su Y, in quanto per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta = \varepsilon$ per il quale

$$\forall y_1,y_2 \in Y \qquad d(y_1,y_2) < \delta \Rightarrow \bigl|\operatorname{dist}(y_1,E) - \operatorname{dist}(y_2,E)\bigr| < \varepsilon\,.$$

Sia ora V aperto in Y e dimostriamo che

$$\forall y \in Y \qquad y \in V \iff \operatorname{dist}\bigl(y, Y\setminus V\bigr) > 0\,.$$



Infatti, se $y \in V$ allora esiste una palla di raggio $\varepsilon > 0$ centrata in y tutta contenuta in V. Ma allora

$$\forall y' \in Y \setminus V \quad d(y,y') \geq \varepsilon\,, \qquad \text{per cui} \qquad \operatorname{dist}\bigl(y, Y \setminus V\bigr) \geq \varepsilon > 0\,.$$

Viceversa se $\operatorname{dist}(y, Y \setminus V) > 0$ è chiaro che $y \notin Y \setminus V$, per cui $y \in V$ (per questo non c'è bisogno che V sia aperto).
Prendiamo adesso $f_n\colon X \to Y$ successione di funzioni misurabili che converge puntualmente verso una $f\colon X \to Y$. Vogliamo dimostrare che f è misurabile. Sia $V \subseteq Y$ aperto; dobbiamo vedere se $f^{-1}(V) \in \mathcal{M}$. Il caso in cui $V = Y$ è banale: $f^{-1}(V) = f^{-1}(Y) = X \in \mathcal{M}$. Altrimenti, se $V \subsetneq Y$,

$$f^{-1}(V) = \bigl\{x \in X \bigm| f(x) \in V\bigr\} = \bigl\{x \in X \bigm| \operatorname{dist}(f(x), Y \setminus V) > 0\bigr\}\,.$$

Poiché $f_n(x) \to f(x)$ per ogni $x \in X$, anche $\operatorname{dist}(f_n(x), Y \setminus V) \to \operatorname{dist}(f(x), Y \setminus V)$. Quindi $\operatorname{dist}(f(x), Y \setminus V) > 0$ se e solo se $\operatorname{dist}(f_n(x), Y \setminus V)$ è maggiore di un qualche $\varepsilon > 0$ definitivamente:

$$\begin{aligned} \operatorname{dist}(f(x), Y \setminus V) > 0 \quad &\iff \quad \exists \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N \quad \operatorname{dist}(f_n(x), Y \setminus V) > \varepsilon \quad \iff \\ &\iff \quad \exists N, M \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N \quad \operatorname{dist}(f_n(x), Y \setminus V) > \frac{1}{M}\,. \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} f^{-1}(V) &= \left\{x \in X \,\middle|\, \exists N, M \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N \quad \operatorname{dist}(f_n(x), Y \setminus V) > \frac{1}{M}\right\} = \\ &= \bigcup_{N,M \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq N} \left\{x \in X \,\middle|\, \operatorname{dist}(f_n(x), Y \setminus V) > \frac{1}{M}\right\}. \end{aligned}$$

Posto $\psi(y) := \operatorname{dist}(y, Y \setminus V)$ per $y \in Y$, questa $\psi\colon Y \to \mathbb{R}$ è continua. Possiamo scrivere

$$\begin{aligned} f^{-1}(V) &= \bigcup_{N,M \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq N} \left\{x \in X \,\middle|\, \psi\bigl(f_n(x)\bigr) > \frac{1}{M}\right\} = \\ &= \bigcup_{N,M \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq N} \underbrace{f_n^{-1}\Bigl(\overbrace{\psi^{-1}\bigl(\underbrace{]1/M, +\infty[}_{\text{aperto in } \mathbb{R}}\bigr)}^{\text{aperto in } Y}\Bigr)}_{\in \mathcal{M}}\,. \end{aligned}$$

Quindi $f^{-1}(V) \in \mathcal{M}$, come volevasi dimostrare.

b. Supponiamo che $f\colon X \to Y$ sia misurabile e che Y sia separabile, cioè che esista una sottinsieme al più numerabile $\{y_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ denso in Y. Per ogni $x \in X$ e $k \in \mathbb{N}$ poniamo

$$\varphi_k(x) := \min\Bigl\{i \in \mathbb{N} \Bigm| d(f(x), y_i) \leq d(f(x), y_j)\ \forall j = 0, \ldots, k\Bigr\}\,.$$

Questa funzione è ben definita. Infatti consideriamo

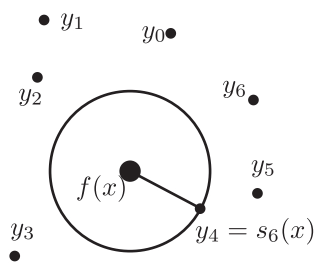
$$m_k(x) := \min\bigl\{d(f(x), y_j) \bigm| 0 \leq j \leq k\bigr\}\,, \qquad \text{di modo che} \quad \varphi_k(x) = \min\bigl\{i \in \mathbb{N} \bigm| d(f(x), y_i) \leq m_k(x)\bigr\}\,.$$

Poiché esiste almeno un i_k fra 0 e k tale che $d(f(x), y_{i_k}) = m_k(x)$, per quell'$i_k$ avremo in particolare $d(f(x), y_{i_k}) \leq m_k(x)$, cioè

$$i_k \in \bigl\{i \in \mathbb{N} \bigm| d(f(x), y_i) \leq m_k(x)\bigr\} \neq \varnothing\,.$$

Ne concludiamo che non solo $\varphi_k(x)$ è ben definito, ma anche che

$$\varphi_k(x) \in \bigl\{0, 1, 2, \ldots, k\bigr\} \qquad \forall k \in \mathbb{N} \quad \forall x \in X\,.$$



Se ora definiamo

$$s_k(x) := y_{\varphi_k(x)} \qquad \forall k \in \mathbb{N} \quad \forall x \in X\,,$$

allora s_k è ben definito e a valori in $\{y_0, y_1, \dots, y_k\}$. Più precisamente, $s_k(x)$ è il punto di $\{y_0, y_1, \dots, y_k\}$ più vicino a $f(x)$, o, quando ce ne sia più d'uno, quello dei più vicini con l'indice minimo. Quindi $s_k\colon X \to Y$ è una funzione semplice. Per dimostrare che è anche misurabile, partiamo da un indice i_0 fra 0 e k e calcoliamo

$$\begin{aligned}
\varphi_k^{-1}(\{i_0\}) &= \Big\{x \in X \;\Big|\; d(f(x), y_{i_0}) \le m_k(x)\Big\} = \Big\{x \in X \;\Big|\; d(f(x), y_{i_0}) \le d(f(x), y_j)\ \forall j = 0, \dots, k\Big\} = \\
&= \bigcap_{j=0}^{k} \Big\{x \in X \;\Big|\; d(f(x), y_{i_0}) \le d(f(x), y_j)\Big\} = \bigcap_{j=0}^{k} \Big\{x \in X \;\Big|\; d(f(x), y_{i_0}) - d(f(x), y_j) \le 0\Big\} = \\
&= \bigcap_{j=0}^{k} X \setminus \Big\{x \in X \;\Big|\; d(f(x), y_{i_0}) - d(f(x), y_j) > 0\Big\}\,.
\end{aligned}$$

Se poniamo $\xi_{i_0,j}(y) := d(y, y_{i_0}) - d(y, y_j)$, la funzione $\xi_{i_0,j}\colon Y \to \mathbb{R}$ è continua perché differenza di funzioni continue, e quindi possiamo scrivere

$$\begin{aligned}
\varphi_k^{-1}(\{i_0\}) &= \bigcap_{j=0}^{k} X \setminus \Big\{x \in X \;\Big|\; d\big(f(x), y_{i_0}\big) - d\big(f(x), y_j\big) > 0\Big\} = \\
&= \bigcap_{j=0}^{k} X \setminus \Big\{x \in X \;\Big|\; \xi_{i_0,j}\big(f(x)\big) > 0\Big\} = \\
&= \bigcap_{j=0}^{k} X \setminus \underbrace{f^{-1}\Big(\overbrace{\xi_{i_0,j}^{-1}\big(\underbrace{]0, +\infty[}_{\text{aperto in } \mathbb{R}}\big)}^{\text{aperto in } Y}\Big)}_{\in \mathcal{M}}\,.
\end{aligned}$$

Dunque $\varphi_k^{-1}(\{i_0\})$ è misurabile per ogni $i_0 \in \{0, 1, \dots, k\}$. Segue ora che $s_k\colon X \to Y$ è pure misurabile: se $V \subset Y$ è aperto

$$\begin{aligned}
s_k^{-1}(V) &= \big\{x \in X \mid y_{\varphi_k(x)} \in V\big\} = \Big\{x \in X \;\Big|\; y_{\varphi_k(x)} \in V \cap \{y_0, y_1, \dots, y_k\}\Big\} = \\
&= \Big\{x \in X \;\Big|\; \exists i \in \{0, 1, \dots, k\} \text{ tale che } \varphi_k(x) = i \text{ e } y_i \in V\Big\} = \\
&= \bigcup_{\substack{i \in \{0, \dots, k\} \\ y_i \in V}} \varphi_k^{-1}(\{i\})\,.
\end{aligned}$$

Resta da dimostrare che s_k converge puntualmente verso f, cioè che

$$\lim_{k \to +\infty} d\big(f(x), s_k(x)\big) = 0 \qquad \forall x \in X\,.$$

Ma

$$0 \le d\big(f(x), s_k(x)\big) = d\big(f(x), y_{\varphi_k(x)}\big) = m_k(x) = \min\big\{d(f(x), y_j) \;\big|\; 0 \le j \le k\big\}\,.$$

Viene il momento di sfruttare la densità di $\{y_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ in Y: fissato $\varepsilon > 0$ ed $x \in X$ esiste $i_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che $d(f(x), y_{i_\varepsilon}) < \varepsilon$. Ma allora

$$\forall k \ge i_\varepsilon \qquad 0 \le d\big(f(x), s_k(x)\big) = m_k(x) \le d(f(x), y_{i_\varepsilon}) < \varepsilon\,,$$

come volevasi dimostrare.