Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 1998/99

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Istituzioni di Analisi Superiore, primo modulo

Prova Scritta del 16 febbraio 1999

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento di identità (se chiesto):

Tempo a disposizione: 3 ore.

1. Sia X uno spazio topologico di Hausdorff, localmente compatto e σ-compatto. Sia μ una misura positiva sui boreliani di $\mathbb{R}$, e sia $c \geq 0$. Dimostrare che $\mu(X) \leq c$ se e solo se per ogni $f\colon X \to \mathbb{R}$ continua a supporto compatto si ha che $\int_X |f| d\mu \leq c \sup_X |f|$.

2. Sia X un insieme al più numerabile e $\mathcal{A}$ una famiglia di sottinsiemi di X. Definiamo la relazione $\sim_{\mathcal{A}}$ così: $x \sim_{\mathcal{A}} y$ quando per ogni $E \in \mathcal{A}$ si ha che $x \in E \iff y \in E$.

a. Dimostrare che $\sim_{\mathcal{A}}$ è una relazione di equivalenza e che per ogni $x \in X$ la classe di equivalenza contenente x è l'intersezione di una famiglia *al più numerabile* di elementi di $\mathcal{A}$ e di loro complementi. Dedurre che la σ-algebra generata da $\mathcal{A}$ contiene tutte le classi di equivalenza per $\sim_{\mathcal{A}}$.

b. Sia $\sim$ una qualsiasi relazione di equivalenza su X e sia $\mathcal{M}_\sim$ la σ-algebra su X generata dalle classi di equivalenza per $\sim$. Dimostrare che $\mathcal{M}_\sim$ coincide con la famiglia delle unioni di classi di equivalenza per $\sim$.

c. Consideriamo l'applicazione $\mathcal{M} \mapsto \sim_{\mathcal{M}}$, ristretta alle $\mathcal{M}$ che sono già σ-algebre su X, e l'applicazione $\sim \mapsto \mathcal{M}_\sim$ definita nel punto precedente. Dimostrare che sono una l'inversa dell'altra, e che quindi stabiliscono una corrispondenza biunivoca fra l'insieme delle σ-algebre su X e l'insieme delle relazioni di equivalenza su X.

Punti: 10, 10+5+5

Università degli Studi di Udine Anno Accademico 1998/99

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Istituzioni di Analisi Superiore, primo modulo

Prova Scritta del 16 febbraio 1999

Svolgimento

1. Sia X uno spazio topologico di Hausdorff, localmente compatto e σ-compatto. Sia μ una misura positiva sui boreliani di $\mathbb{R}$, e sia $c \geq 0$. Supponiamo che $\mu(X) \leq c$. Allora per ogni $f\colon X \to \mathbb{R}$ continua a supporto compatto possiamo scrivere

$$\int_X |f| \, d\mu \leq \mu(X) \cdot \sup_X |f| \leq c \cdot \sup_X |f| \; .$$

Viceversa, supponiamo che per ogni $f\colon X \to \mathbb{R}$ continua a supporto compatto si abbia che $\int_X |f| \, d\mu \leq c \sup_X |f|$. Sia $\{K_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ una famiglia numerabile di compatti di X la cui unione sia X. Poiché l'unione finita di compatti è compatta, possiamo supporre che la successione sia crescente: $K_n \subseteq K_{n+1}$. Grazie al lemma di Urysohn per ogni n esiste una funzione $f_n\colon X \to \mathbb{R}$ continua a supporto compatto tale che $\chi_{K_n} \leq f_n \leq 1$. Integrando si ottiene

$$\mu(K_n) = \int_X \chi_{K_n} \, d\mu \leq \int_X f_n \, d\mu \leq c \cdot \sup_X |f_n| \leq c \, .$$

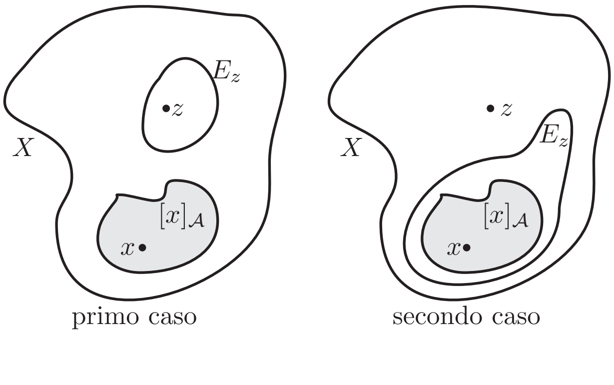
Passando al limite per $n \to +\infty$ si ottiene

$$\mu(X) = \mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n\Big) = \lim_{n\to+\infty} \mu(K_n) \leq c \, ,$$

come volevasi dimostrare.
Un altro modo di procedere è di chiedere che f_{n+1} valga 1 non solo su K_{n+1} ma anche sul supporto di f_n. Così la successione f_n *cresce con* n e converge puntualmente a 1 su tutto X e si può applicare il teorema della convergenza monotona:

$$\mu(X) = \int_X 1 \, d\mu = \int_X \Big(\lim_{n\to+\infty} f_n\Big) d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_X f_n \, d\mu \leq \max\lim_{n\to+\infty} \Big(c \sup_X |f_n| \Big) \leq c \, ,$$

2. a. Le proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva della relazione $\sim_{\mathcal{A}}$ vengono direttamente dalle proprietà dell'equivalenza logica. Riflessiva: $x \sim_{\mathcal{A}} x$ perché è sempre vero che per ogni $E \in \mathcal{A}$ si ha che $x \in E \iff x \in E$. Simmetrica: supponiamo che $x \sim_{\mathcal{A}} y$; allora fissato $E \in \mathcal{A}$ abbiamo che $x \in E \iff y \in E$, che è lo stesso che $y \in E \iff x \in E$, per cui $y \sim_{\mathcal{A}} x$. Transitiva: supponiamo che $x \sim_{\mathcal{A}} y$ e $y \sim_{\mathcal{A}} z$; allora fissato $E \in \mathcal{A}$ abbiamo che $x \in E \iff y \in E$ e $y \in E \iff z \in E$, che implicano che $x \in E \iff z \in E$; dunque $x \sim_{\mathcal{A}} z$.



primo caso secondo caso

Sia ora $[x]_{\mathcal{A}}$ la classe di equivalenza a cui appartiene $x \in X$. Sia $z \in X \setminus [x]_{\mathcal{A}}$. Negare che $y \sim_{\mathcal{A}} x$ significa affermare che esiste un $E_z \in \mathcal{A}$ per il quale vale uno e uno solo dei due casi:

1) $z \in E_z$ e $x \notin E_z$,
2) $z \in X \setminus E_z$ e $x \in E_z$.

Vale allora l'uguaglianza

$$X \setminus [x]_{\mathcal{A}} = \Bigg(\bigcup_{\substack{z\in X\setminus[x]_{\mathcal{A}} \\ x\notin E_z}} E_z \Bigg) \cup \Bigg(\bigcup_{\substack{z\in X\setminus[x]_{\mathcal{A}} \\ x\in E_z}} X \setminus E_z \Bigg) .$$

Infatti l'inclusione $\subset$ segue subito dalla definizione di E_z. Per l'inclusione inversa, sia y nel secondo membro dell'uguaglianza. Allora esiste $z \in X \setminus [x]_{\mathcal{A}}$ tale che o ($x \notin E_z$ e $y \in E_z$) oppure ($x \in E_z$ e $y \in X \setminus E_z$). In entrambi i casi non è vero che $x \sim_{\mathcal{A}} y$, per cui $y \in X \setminus [x]_{\mathcal{A}}$, che è il primo membro.
Passando ai complementari le unioni diventano intersezioni

$$[x]_{\mathcal{A}} = \Bigg(\bigcap_{\substack{z \in X \setminus [x]_{\mathcal{A}} \\ x \notin E_z}} X \setminus E_z \Bigg) \cap \Bigg(\bigcap_{\substack{z \in X \setminus [x]_{\mathcal{A}} \\ x \in E_z}} E_z \Bigg) ,$$

da cui si vede che $[x]_{\mathcal{A}}$ è l'intersezione di una famiglia di elementi di $\mathcal{A}$ e di complementari di elementi di $\mathcal{A}$, famiglia al più numerabile, perché indicizzata da z, che varia nell'insieme al più numerabile $X \setminus [x]_{\mathcal{A}}$.
Sia $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ la σ-algebra generata da $\mathcal{A}$. Contenendo $\mathcal{A}$ ed essendo stabile per complementi e per unioni numerabili, ad $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ devono appartenere anche tutte le classi di equivalenza per $\sim_{\mathcal{A}}$.

b. Sia $\mathcal{C}$ la famiglia delle classi di equivalenza per $\sim$, $\mathcal{M}_\sim$ la σ-algebra generata da $\mathcal{C}$, ed $\mathcal{M}'$ l'insieme delle unioni di elementi di $\mathcal{C}$:

$$\mathcal{M}' := \Bigg\{ \bigcup_{F \in \mathcal{F}} F \;\Bigg|\; \mathcal{F} \subseteq \mathcal{C} \Bigg\} .$$

$\mathcal{C}$ è una partizione di X, ed è pertanto al più numerabile. Ogni elemento di $\mathcal{M}'$, essendo l'unione di una famiglia al più numerabile di elementi di $\mathcal{C}$, appartiene ad $\mathcal{M}_\sim$. Insomma $\mathcal{M}_\sim \supset \mathcal{M}'$. Se dimostriamo che $\mathcal{M}'$ è una σ-algebra, potremo concludere che coincide con $\mathcal{M}_\sim$. Fra le famiglie di classi di equivalenza c'è quella vuota, la cui unione è l'insieme vuoto, che quindi appartiene a $\mathcal{M}'$. Chiaramente $\mathcal{M}'$ è stabile per unioni qualsiasi, e in particolare quindi per unioni numerabili. Resta solo da vedere che $\mathcal{M}'$ è stabile per complementi. Sia allora $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}$ ed $E := \bigcup_{F \in \mathcal{F}} F$. Allora, sfruttando il fatto che $\mathcal{C}$ è una partizione di X,

$$\begin{aligned}
X \setminus E = X \setminus \bigcup_{F \in \mathcal{F}} F = \bigcap_{F \in \mathcal{F}} (X \setminus F) &= \bigcap_{F \in \mathcal{F}} \Bigg(\bigcup_{G \in \mathcal{C} \setminus \{F\}} G \Bigg) = \\
&= \Big\{ x \in X \;\Big|\; \forall F \in \mathcal{F} \quad \exists G \in \mathcal{C} \setminus \{F\} \quad x \in G \Big\} = \qquad (\text{poiché } x \in G \in \mathcal{C} \iff G = [x]_\sim) \\
&= \Big\{ x \in X \;\Big|\; \forall F \in \mathcal{F} \quad [x]_\sim \in \mathcal{C} \setminus \{F\} \text{ e } x \in [x]_\sim \Big\} = \\
&= \Big\{ x \in X \;\Big|\; \forall F \in \mathcal{F} \quad [x]_\sim \in \mathcal{C} \setminus \{F\} \Big\} = \\
&= \Big\{ x \in X \;\Big|\; [x]_\sim \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{F} \Big\} = \\
&= \bigcup_{G \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{F}} G ,
\end{aligned}$$

per cui anche $X \setminus E \in \mathcal{M}'$. Dunque gli assiomi delle σ-algebre sono soddisfatti per $\mathcal{M}'$.

c. Sia S l'insieme delle σ-algebre su X, ed R l'insieme delle relazioni di equivalenza su X. Abbiamo definito le funzioni $\varphi \colon S \to R$ come $\varphi(\mathcal{M}) := \sim_{\mathcal{M}}$, e $\psi \colon R \to S$ come $\psi(\sim) := \mathcal{M}_\sim$:

$$S \underset{\psi}{\overset{\varphi}{\rightleftarrows}} R .$$

Dobbiamo dimostrare che $\psi(\varphi(\mathcal{M})) = \mathcal{M}$ e $\varphi(\psi(\sim)) = \sim$ per ogni $\mathcal{M} \in S$ e ogni $\sim \in R$.

Prima parte. Sia $\mathcal{M}$ una σ-algebra su X, $\sim_{\mathcal{M}}$ la relazione di equivalenza associata, $\mathcal{C}$ la famiglia delle classi di equivalenza per $\sim_{\mathcal{M}}$, e $\mathcal{M}'$ la σ-algebra generata da $\mathcal{C}$. Dobbiamo dimostrare che $\mathcal{M}' = \mathcal{M}$. Per il punto **a**, $\mathcal{M}$ contiene $\mathcal{C}$, e quindi anche tutte le unioni (al più numerabili, necessariamente) di elementi di $\mathcal{C}$, cioè (per il punto **b** applicato a $\sim_{\mathcal{M}}$) tutti gli elementi di $\mathcal{M}'$. Quindi $\mathcal{M}' \subseteq \mathcal{M}$.
Viceversa, partiamo da $E \in \mathcal{M}$. Per definizione di $\sim_{\mathcal{M}}$, se $x \in E$ e $x \sim_{\mathcal{M}} y$ allora $y \in E$. In altre parole, ogni punto in E ci sta con tutta la sua classe di equivalenza, per cui E è l'unione di una famiglia di classi di equivalenza per $\sim_{\mathcal{M}}$:

$$E = \bigcup_{x \in E} [x]_{\sim_{\mathcal{M}}} = \bigcup_{\substack{F \in \mathcal{C} \\ F \subseteq E}} F ,$$

e dunque E è un elemento di $\mathcal{M}'$ per il punto **b**. Questo dimostra che $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}'$ e quindi l'uguaglianza.

Seconda parte. Sia ora $\sim$ una relazione di equivalenza su X, $\mathcal{C}$ la famiglia delle classi di equivalenza, $\mathcal{M}$ la σ-algebra generata da $\mathcal{C}$, e $\sim_{\mathcal{M}}$ la relazione di equivalenza associata a $\mathcal{M}$. Dobbiamo dimostrare che $\sim$ e $\sim_{\mathcal{M}}$ coincidono.
Sia $\mathcal{C}'$ la famiglia delle classi di equivalenza per $\sim_{\mathcal{M}}$. Per il punto **a** ogni elemento di $\mathcal{C}'$ appartiene ad $\mathcal{M}$. Per il punto **b** ogni elemento di $\mathcal{M}$ è unione di elementi di $\mathcal{C}$. Quindi ogni elemento di $\mathcal{C}'$ è unione di elementi di $\mathcal{C}$. In altre parole $x \sim y \Rightarrow x \sim_{\mathcal{M}} y$.
Viceversa, supponiamo che $x \sim_{\mathcal{M}} y$ e sia $E := [x]_\sim \in \mathcal{C} \subset \mathcal{M}$. Poiché $E \in \mathcal{M}$ e $x \in E$, deduciamo che $y \in E$ per definizione di $\sim_{\mathcal{M}}$, e quindi $x \sim y$ per definizione di $\mathcal{C}$. Questo dimostra che $x \sim y \Leftarrow x \sim_{\mathcal{M}} y$, e perciò le due relazioni coincidono.
Sviluppi. Si possono applicare questi ragionamenti per contare quante σ-algebre ci sono su un insieme finito di n elementi. Infatti abbiamo visto che le σ-algebre sono tante quante le relazioni di equivalenza, e quindi tante quante la partizioni. Ora è abbastanza facile trovare una formula ricorsiva per il numero $p_{n,m}$ di partizioni in un insieme di n elementi in esattamente m sottinsiemi non vuoti a due a due disgiunti. Infatti $p_{n,1} = p_{n,n} = 1$ ovviamente. Supponiamo ora di conoscere $p_{k,m}$ per $1 \leq m \leq k \leq n$, e consideriamo un insieme $X := \{x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}\}$ di $n+1$ elementi distinti. Le partizioni di X in m sottinsiemi si possono dividere in due tipi fra loro esclusivi: quelle a cui appartiene il singoletto $\{x_{n+1}\}$, e tutte le altre. Le partizioni del primo tipo sono evidentemente tante quante la partizioni di $\{x_1, \ldots, x_n\}$ in $m-1$ sottinsiemi disgiunti, cioè $p_{n,m-1}$. Consideriamo le partizioni in cui x_{n+1} non compare solo: possiamo suddividerle a loro volta in classi in base a cosa rimane se si cancella x_{n+1}. Di tali classi ce ne sono esattamente tante quante le partizioni di $\{x_1, \ldots, x_n\}$ in m sottinsiemi, cioè $p_{n,m}$. In ognuna di queste classi possiamo avere cancellato x_{n+1} da uno e uno solo fra gli m sottinsiemi. In definitiva

$$p_{n+1,m} = p_{n,m-1} + m p_{n,m} \qquad \text{per } 2 \leq m \leq n$$

(i numeri $p_{n,m}$ sono detti numeri di Stirling del secondo tipo). Il numero P_n delle possibili partizioni di un insieme di n elementi è pertanto

$$P_n = p_{n,1} + p_{n,2} + \cdots + p_{n,n}\,.$$

Come si vede il numero cresce rapidamente con n.

n	σ-algebre
1	1
2	2
3	5
4	15
5	52
6	203
7	877
8	4 140
9	21 147
10	115 975
11	678 570
12	4 213 597
13	27 644 437
14	190 899 322
15	1 382 958 545