Università degli Studi di Udine | Anno Accademico 1998/99

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Istituzioni di Analisi Superiore, primo modulo

Prova Scritta del 27 gennaio 1999

Cognome e Nome:

Matricola: Documento di identità (se chiesto):

Tempo a disposizione: 3 ore.

1. Consideriamo $\mathbb{R}^k$ con la misura di Lebesgue k-dimensionale λ. Sia $f\colon \mathbb{R}^k \to [0, +\infty]$ una funzione misurabile, e sia $T\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ una trasformazione lineare invertibile. Allora $f \circ T$ è pure misurabile, e $\int_{\mathbb{R}^k} f\, d\lambda = |\det T| \int_{\mathbb{R}^k} f \circ T\, d\lambda$.

(Cominciare col caso in cui $f = \chi_E$ e usare il comportamento noto della misura di Lebesgue per trasformazioni lineari).

2. Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^2$, $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1, I un intervallo di $\mathbb{R}$, $\alpha, \beta\colon I \to \mathbb{R}$ funzioni di classe C^1 tali che per ogni $x \in I$ il segmento di estremi $(\alpha(x), x)$ e $(\beta(x), x)$ sia contenuto in Ω. Dimostrare che allora la funzione

$$F(x) := \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t, x)\, dt$$

è ben definita su I, derivabile, e che per ogni $x \in I$

$$F'(x) = f\big(\beta(x), x\big)\beta'(x) - f\big(\alpha(x), x\big)\alpha'(x) + \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(t, x)\, dt\,.$$

(Si può provare a dimostrare che la funzione di tre variabili $(x, a, b) \mapsto \int_a^b f(t, x)\, dt$ è differenziabile, usando le derivate parziali, e poi applicare la regola del differenziale delle funzioni composte; oppure con un cambio di variabile si può riportare l'integrale a un intervallo fisso).

Punti: 10, 20

Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 1998/99

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Istituzioni di Analisi Superiore, primo modulo

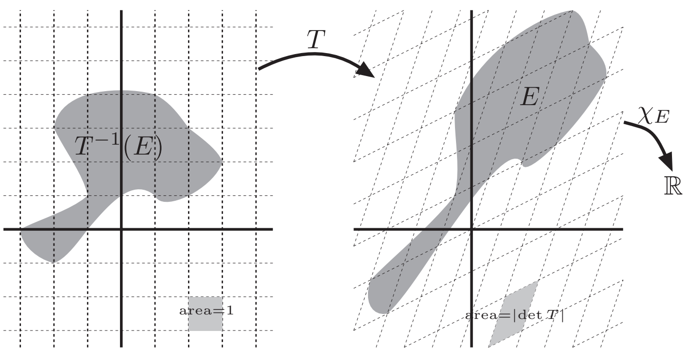
Prova Scritta del 27 gennaio 1999

Svolgimento

1. Riassumiamo i fatti noti sulle trasformazioni lineari di insiemi misurabili: sia $\mathcal{M}$ la σ-algebra dei misurabili secondo Lebesgue in $\mathbb{R}^n$, $S\colon\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare, ed $E \in \mathcal{M}$; si sa che allora $S(E) \in \mathcal{M}$ e che $\lambda(S(E)) = |\det S|\,\lambda(E)$.
Dimostriamo che se f è una funzione misurabile secondo Lebesgue su $\mathbb{R}^n$ (a valori in un qualsiasi spazio topologico) e $T\colon\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è lineare e invertibile, allora $f \circ T$ è misurabile, cioè ogniqualvolta V è un aperto nel codominio di f, la contrimmagine $(f \circ T)^{-1}(V)$ è in $\mathcal{M}$. Ma possiamo scrivere

$$(f \circ T)^{-1}(V) = T^{-1}(f^{-1}(V))\,,$$

e questo insieme è in effetti misurabile in quanto $f^{-1}(V) \in \mathcal{M}$ perché f è misurabile, e T^{-1} manda misurabili in misurabili perché lineare. Notare che non sapessimo che T^{-1} è lineare, ma solo che T è continua, non potremmo concludere che manda misurabili in misurabili, ma solo boreliani in boreliani.
Rimane da dimostrare la formula dell'integrale. Cominciamo col dimostrare che se $E \subseteq \mathbb{R}^n$ ed $f = \chi_E$ allora



$$f \circ T = \chi_E \circ T = \chi_{T^{-1}(E)}.$$

Infatti per ogni $x \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}(f \circ T)(x) &= f(T(x)) = \chi_E(T(x)) = \\ &= \left\{\begin{matrix}1 & \text{se } T(x) \in E \\ 0 & \text{se } T(x) \notin E\end{matrix}\right\} = \\ &= \left\{\begin{matrix}1 & \text{se } x \in T^{-1}(E) \\ 0 & \text{se } x \notin T^{-1}(E)\end{matrix}\right\} = \\ &= \chi_{T^{-1}(E)}(x)\,.\end{aligned}$$

Quindi, usando le proprietà dei determinanti,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} f \circ T\,d\lambda &= \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{T^{-1}(E)}\,d\lambda = \lambda\bigl(T^{-1}(E)\bigr) = \bigl|\det T^{-1}\bigr|\,\lambda(E) = \frac{1}{|\det T|}\lambda(E) = \\ &= \frac{1}{|\det T|}\int_E \chi_E\,d\lambda = \frac{1}{|\det T|}\int_E f\,d\lambda\,,\end{aligned}$$

cioè

$$\int_E f\,d\lambda = |\det T| \int_{\mathbb{R}^n} f \circ T\,d\lambda \qquad \text{quando } f = \chi_E \text{ con } E \in \mathcal{M}\,.$$

Sia ora $f\colon\mathbb{R}^n \to [0,+\infty[$ una funzione semplice misurabile: $f = \sum_{k=1}^m \alpha_k \chi_{E_k}$, con $\alpha_k \geq 0$ e $E_k \in \mathcal{M}$. Allora per la linearità dell'integrale sulle funzioni positive,

$$\begin{aligned}\int_E f\,d\lambda &= \sum_{k=1}^m \alpha_k \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{E_k}\,d\lambda = \sum_{k=1}^m \alpha_k \left(|\det T| \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{E_k} \circ T\,d\lambda\right) = \\ &= |\det T| \int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{k=1}^m \alpha_k (\chi_{E_k} \circ T)\right) d\lambda = |\det T| \int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{k=1}^m \alpha_k \chi_{E_k}\right) \circ T\,d\lambda = \\ &= |\det T| \int_{\mathbb{R}^n} f \circ T\,d\lambda\,.\end{aligned}$$

Nel caso generale in cui $f\colon \mathbb{R}^n \to [0,+\infty]$ è misurabile secondo Lebesgue, esiste una successione di funzioni semplici misurabili e positive $f_k\colon \mathbb{R}^n \to [0,+\infty[$ tale che $f_k \nearrow f$ per $k \to +\infty$ puntualmente su $\mathbb{R}^n$. Allora anche $f_k \circ T \nearrow f \circ T$ puntualmente e per il teorema della convergenza monotona

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\,d\lambda = \int_{\mathbb{R}^n} \Bigl(\lim_{k\to+\infty} f_k\Bigr) d\lambda = \lim_{k\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k\,d\lambda = \lim_{k\to+\infty} |\det T| \int_{\mathbb{R}^n} f_k \circ T\,d\lambda =$$
$$= |\det T| \int_{\mathbb{R}^n} \Bigl(\lim_{k\to+\infty} (f_k \circ T)\Bigr) d\lambda = |\det T| \int_{\mathbb{R}^n} f \circ T\,d\lambda\,.$$

Si poteva anche saltare il passaggio intermedio delle funzioni semplici ricordando che se $f\colon \mathbb{R}^n \to [0,+\infty]$ è misurabile allora esiste una successione di costanti α_k e di insiemi $E_k \in \mathcal{M}$ tali che

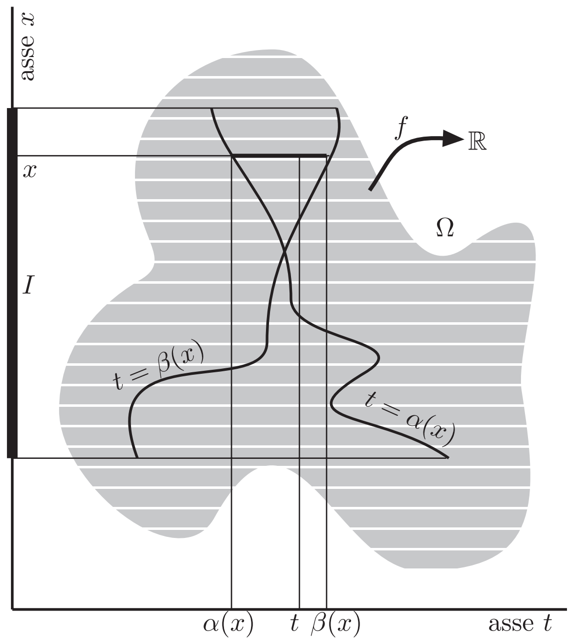
$$f = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k \chi_{E_k} \qquad \text{puntualmente.}$$

Quindi grazie al teorema sull'integrazione delle serie positive e il risultato già ottenuto sulle funzioni del tipo $f = \chi_E$

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\,d\lambda = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{E_k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k\,|\det T| \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{E_k} \circ T\,d\lambda =$$
$$= |\det T| \int_{\mathbb{R}^n} \Bigl(\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k \chi_{E_k} \circ T\Bigr) d\lambda = |\det T| \int_{\mathbb{R}^n} \Bigl(\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k \chi_{E_k}\Bigr) \circ T\,d\lambda =$$
$$= |\det T| \int_{\mathbb{R}^n} f \circ T\,d\lambda\,.$$

2. Sia $x \in I$. Allora il segmento compreso fra $(\alpha(x), x)$ e $(\beta(x), x)$ è tutto contenuto in Ω, e la funzione $t \mapsto f(t,x)$ è definita e continua sull'intervallo chiuso di estremi $\alpha(x)$ e $\beta(x)$ (non diciamo "sull'intervallo $[\alpha(x), \beta(x)]$", perché non sappiamo se $\alpha(x) \le \beta(x)$). Dunque per tale x ha senso l'integrale (orientato)

$$F(x) := \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t,x)\,dt$$



Primo modo. Esprimiamo la funzione F come composizione di due funzioni

$$F = \varphi \circ \gamma\,,$$

definendo

$$\varphi(x,a,b) := \int_a^b f(t,x)\,dt\,,$$
$$\gamma(x) := \bigl(x, \alpha(x), \beta(x)\bigr)\,,$$

di modo che la sua derivata si possa decidere sulla differenziabilità di φ e γ. Cominciamo col vedere dove sono definite φ e γ. La φ è definita nell'insieme D delle triple (x,a,b) per le quali il segmento chiuso di estremi (a,x) e (b,x) è contenuto interamente in Ω. L'insieme D è aperto in $\mathbb{R}^3$. Infatti, sia $(x_0,a_0,b_0) \in D$ con $a \le b$ per esempio. Poiché Ω è aperto e il segmento chiuso di estremi (a,x) e (b,x) è compatto, esiste un $\varepsilon > 0$ tale che il rettangolo aperto $]x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon[\times]a_0-\varepsilon, b_0+\varepsilon[$ è contenuto in Ω. Ma allora tutto il parallelepipedo aperto $]x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon[\times]a_0-\varepsilon, b_0+\varepsilon[\times]a_0-\varepsilon, b_0+\varepsilon[$ è contenuto in D e contiene (x_0,a_0,b_0). La γ è definita su I ed è chiaramente a valori in D.

Dimostriamo che φ ha derivate parziali continue su D e calcoliamole. Le derivate parziali rispetto ad a e b sono particolarmente facili per il teorema fondamentale del calcolo, in quanto $t \mapsto f(t,x)$ è continua per ogni x fissato:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial b}(x,a,b) = \frac{\partial}{\partial b}\int_a^b f(t,x)\,dt = f(b,x)\,, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial a}(x,a,b) = \frac{\partial}{\partial a}\int_a^b f(t,x)\,dt = -f(a,x)\,,$$

e $\partial\varphi/\partial a$ e $\partial\varphi/\partial b$ risultano continue perché f è continua. La derivata parziale di φ rispetto a x esiste ed è continua per i teoremi sulla derivazione sotto il segno di integrale:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,a,b) = \frac{\partial}{\partial x}\int_a^b f(t,x)\,dt = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\,dt\,.$$

Per il teorema del differenziale totale, avendo tutte le derivate parziali continue la funzione φ è differenziabile su D. La derivata di γ è ovvia: $\gamma'(x) = (1, \alpha'(x), \beta'(x))$. La F è dunque composizione di φ con γ, entrambe differenziabili. Per la formula del differenziale della funzione composta possiamo scrivere:

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \varphi'\big(\gamma(x)\big)\cdot\gamma'(x) = (\nabla\varphi)\big(x,\alpha(x),\beta(x)\big)\cdot\big(1,\alpha'(x),\beta'(x)\big) = \\
&= \frac{\partial\varphi}{\partial x}\big(x,\alpha(x),\beta(x)\big) + \frac{\partial\varphi}{\partial a}\big(x,\alpha(x),\beta(x)\big)\cdot\alpha'(x) + \frac{\partial\varphi}{\partial b}\big(x,\alpha(x),\beta(x)\big)\cdot\beta'(x) = \\
&= \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\,dt + f\big(\alpha(x),x\big)\big(-\alpha'(x)\big) + f\big(\beta(x),x\big)\beta'(x) = \\
&= \beta'(x) f\big(\beta(x),x\big) - \alpha'(x) f\big(\alpha(x),x\big) + \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\,dt\,.
\end{aligned}$$

Secondo modo. Possiamo ricondurre l'integrale all'intervallo fisso $[0,1]$ quando $\alpha(x) \neq \beta(x)$ con un cambio di variabile affine: la nuova variabile τ verifica

$$\frac{t-\alpha(x)}{\beta(x)-\alpha(x)} = \frac{\tau - 0}{1-0} = \tau\,, \quad \text{cioè} \quad t = \alpha(x) + \big(\beta(x)-\alpha(x)\big)\tau\,, \quad dt = \big(\beta(x)-\alpha(x)\big)d\tau\,.$$

Sostituendo nell'integrale:

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int_0^1 f\Big(\alpha(x) + (\beta(x)-\alpha(x))\tau, x\Big)\big(\beta(x)-\alpha(x)\big)d\tau = \\
&= \big(\beta(x)-\alpha(x)\big)\int_0^1 f\Big(\alpha(x) + (\beta(x)-\alpha(x))\tau, x\Big)d\tau \qquad \text{se } \alpha(x) \neq \beta(x)\,.
\end{aligned}$$

La formula è vera banalmente anche quando $\beta(x) = \alpha(x)$ in quanto in tal caso i tre membri dell'uguaglianza sono nulli. Poniamo

$$g(\tau,x) := f\Big(\alpha(x) + (\beta(x)-\alpha(x))\tau, x\Big) \qquad \text{per } (\tau,x) \in [0,1]\times I\,,$$

di modo che

$$F(x) = \big(\beta(x)-\alpha(x)\big)\int_0^1 g(\tau,x)\,d\tau \qquad \forall x \in I\,.$$

La funzione g è di classe C^1 su tutto $[0,1]\times I$ in quanto composizione di funzioni di classe C^1. Quindi valgono i teoremi di derivazione sotto il segno di integrale (caso compatto): F è di classe C^1 e

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \big(\beta'(x)-\alpha'(x)\big)\int_0^1 g(\tau,x)\,d\tau + \big(\beta(x)-\alpha(x)\big)\int_0^1 \frac{\partial g}{\partial x}(\tau,x)\,d\tau = \\
&= \begin{cases} \dfrac{\beta'(x)-\alpha'(x)}{\beta(x)-\alpha(x)}F(x) + \big(\beta(x)-\alpha(x)\big)\displaystyle\int_0^1 \frac{\partial g}{\partial x}(\tau,x)\,d\tau & \text{se } \alpha(x) \neq \beta(x), \\[2ex] \big(\beta'(x)-\alpha'(x)\big)\displaystyle\int_0^1 g(\tau,x)\,d\tau & \text{se } \alpha(x) = \beta(x). \end{cases}
\end{aligned}$$

Calcoliamo la derivata parziale di g rispetto a x, grazie ai teoremi sul differenziale delle funzioni composte:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial g}{\partial x}(\tau,x) = \frac{\partial}{\partial x}\Big(f\big(\alpha(x)+(\beta(x)-\alpha(x))\tau,x\big)\Big) = \\
&= \Big(\alpha'(x)+(\beta'(x)-\alpha'(x))\tau\Big)\frac{\partial f}{\partial t}\Big(\alpha(x)+(\beta(x)-\alpha(x))\tau,x\Big) + \frac{\partial f}{\partial x}\Big(\alpha(x)+(\beta(x)-\alpha(x))\tau,x\Big)\,.
\end{aligned}$$

Integriamo il primo addendo, ritornando alla variabile iniziale t se $\alpha(x)\neq\beta(x)$,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \Big(\alpha'(x)+(\beta'(x)-\alpha'(x))\tau\Big)\frac{\partial f}{\partial t}\Big(\underbrace{\alpha(x)+(\beta(x)-\alpha(x))\tau}_{=t},x\Big)d\tau &= \alpha'(x)\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)}\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\frac{dt}{\beta(x)-\alpha(x)} + \\
&+ \big(\beta'(x)-\alpha'(x)\big)\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)}\frac{t-\alpha(x)}{\beta(x)-\alpha(x)}\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\frac{dt}{\beta(x)-\alpha(x)} = \\
&= \frac{\alpha'(x)}{\beta(x)-\alpha(x)}\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)}\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\,dt + \frac{\beta'(x)-\alpha'(x)}{(\beta(x)-\alpha(x))^2}\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} t\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\,dt - \\
&- \alpha(x)\frac{\beta'(x)-\alpha'(x)}{(\beta(x)-\alpha(x))^2}\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)}\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\,dt = \\
&= \left(\frac{\alpha'(x)}{\beta(x)-\alpha(x)} - \alpha(x)\frac{\beta'(x)-\alpha'(x)}{(\beta(x)-\alpha(x))^2}\right)\underbrace{\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)}\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\,dt}_{\text{teor. fond. calcolo}} + \\
&+ \frac{\beta'(x)-\alpha'(x)}{(\beta(x)-\alpha(x))^2}\underbrace{\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} t\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\,dt}_{\text{per parti}} = \\
&= \frac{\alpha'(x)\beta(x)-\alpha(x)\beta'(x)}{(\beta(x)-\alpha(x))^2}\big(f(\beta(x),x)-f(\alpha(x),x)\big) + \\
&+ \frac{\beta'(x)-\alpha'(x)}{(\beta(x)-\alpha(x))^2}\left(\Big[tf(t,x)\Big]_{t=\alpha(x)}^{\beta(x)} - \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t,x)\,dt\right) = \\
&= \frac{\alpha'(x)\beta(x)-\alpha(x)\beta'(x)}{(\beta(x)-\alpha(x))^2}\big(f(\beta(x),x)-f(\alpha(x),x)\big) + \\
&+ \frac{\beta'(x)-\alpha'(x)}{(\beta(x)-\alpha(x))^2}\Big(\beta(x)f\big(\beta(x),x\big)-\alpha(x)f\big(\alpha(x),x\big)-F(x)\Big) = \\
&= \frac{\beta'(x)f\big(\beta(x),x\big)-\alpha'(x)f\big(\alpha(x),x\big)}{\beta(x)-\alpha(x)} - \frac{\beta'(x)-\alpha'(x)}{(\beta(x)-\alpha(x))^2}F(x)\,.
\end{aligned}$$

Integriamo il secondo addendo di $\partial g/\partial x$, ritornando alla variabile iniziale t se $\alpha(x)\neq\beta(x)$:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}\Big(\underbrace{\alpha(x)+(\beta(x)-\alpha(x))\tau}_{=t},x\Big)\,d\tau &= \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)}\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\frac{dt}{\beta(x)-\alpha(x)} = \\
&= \frac{1}{\beta(x)-\alpha(x)}\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)}\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\,dt\,.
\end{aligned}$$

Sostituendo nella formula per $F'(x)$ abbiamo, sempre quando $\alpha(x)\neq\beta(x)$:

$$F'(x) = \frac{\beta'(x)-\alpha'(x)}{\beta(x)-\alpha(x)}F(x) + \big(\beta(x)-\alpha(x)\big)\int_0^1\frac{\partial g}{\partial x}(\tau,x)\,d\tau =$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\beta'(x)-\alpha'(x)}{\beta(x)-\alpha(x)}F(x) + \beta'(x) f\big(\beta(x),x\big) - \alpha'(x) f\big(\alpha(x),x\big) - \\
&\quad - \frac{\beta'(x)-\alpha'(x)}{\beta(x)-\alpha(x)}F(x) + \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\,dt = \\
&= \beta'(x) f\big(\beta(x),x\big) - \alpha'(x) f\big(\alpha(x),x\big) + \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\,dt\,.
\end{aligned}
$$

Rimane solo da verificare la formula nel caso in cui $\alpha(x) = \beta(x)$:

$$
\begin{aligned}
F'(x) &= \big(\beta'(x)-\alpha'(x)\big)\int_0^1 g(\tau,x)\,d\tau = \big(\beta'(x)-\alpha'(x)\big)\int_0^1 f\Big(\alpha(x) + \underbrace{\big(\beta(x)-\alpha(x)\big)}_{=0}\tau, x\Big)\,d\tau = \\
&= \big(\beta'(x)-\alpha'(x)\big) f(\alpha(x),x)\cdot(1-0) = \beta'(x) f\big(\underbrace{\alpha(x)}_{=\beta(x)},x\big) - \alpha'(x) f\big(\alpha(x),x\big) = \\
&= \beta'(x) f\big(\beta(x),x\big) - \alpha'(x) f\big(\alpha(x),x\big) = \\
&= \beta'(x) f\big(\beta(x),x\big) - \alpha'(x) f\big(\alpha(x),x\big) + \underbrace{\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\,dt}_{=0}\,.
\end{aligned}
$$