Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Istituzioni di Analisi Superiore, primo modulo

Prova Scritta del 18 febbraio 1998

Cognome e Nome:

Matricola: Documento di identità (se chiesto):

Chi porta quest'unico modulo ha 90 minuti di tempo e deve ritenersi a punteggio pieno con 15 punti. Chi porta due moduli ha tempo tre ore complessive e ha punteggio pieno con 30 punti, anche se presi tutti da uno solo dei due compiti.

1. Consideriamo la rappresentazione dei numeri reali ≥ 0 in base 3, con la convenzione di scegliere sempre la rappresentazione collo 0 periodico rispetto a quella col 2 periodico per quei numeri che le ammettono entrambe. Sia E l'insieme dei numeri di $[0,1[$ la cui rappresentazione in base 3 contiene almeno due zeri *consecutivi.* Per $x \in E$ sia $\varphi(x)$ la sequenza delle cifre ternarie di x comprese fra la virgola e la prima coppia di zeri. Per $x, y \in E$ definiamo $x \sim y$ se $\varphi(x) = \varphi(y)$.

a. Dimostrare che E è denso in $[0,1]$ e che E e $[0,1[\setminus E$ hanno la stessa cardinalità di $\mathbb{R}$.

b. Dimostrare che $\sim$ è una relazione di equivalenza su E, e che la classe di equivalenza di x è un intervallo di lunghezza $1/3^{n+2}$, dove n è il numero di cifre nella sequenza $\varphi(x)$.

c. Sia t_n il numero di classi di equivalenza per le quali $\varphi(x)$ ha n cifre. Dimostrare che $t_0 = 1$, $t_1 = 2$, e $t_n = 2t_{n-1} + 2t_{n-2}$ per $n \geq 2$.

d. Dimostrare che E è misurabile secondo Lebesgue e calcolarne la misura.

2. Sia $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione misurabile e integrabile secondo Lebesgue su ogni misurabile limitato. Sia $D \subset \mathbb{R}^n$ un misurabile limitato con frontiera di misura nulla, e indichiamo con $x + D$ il traslato di D secondo il vettore x. Dimostrare che la funzione

$$x \mapsto \int_{x+D} f(y)\, dy$$

è continua da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}$.

(Dimostrare che se $x_n \to \bar{x}$ allora $\chi_{x_n+D}(y)$ converge a $\chi_{\bar{x}+D}(y)$ nei punti y che non stanno sulla frontiera di $\bar{x} + D$).

3. Dimostrare che

$$\int_0^{+\infty} \exp\left(-\left(x - \frac{a}{x}\right)^2\right) dx = \begin{cases} \sqrt{\pi}/2 & \text{se } a \geq 0, \\ \sqrt{\pi}e^{4a}/2 & \text{se } a < 0. \end{cases}$$

Si può passare al limite sotto il segno di integrale per $a \to +\infty$?

(Derivare sotto il segno di integrale, se si può, e vedere cosa succede col cambio di variabili $y = a/x$).

Punti: 10, 10, 7

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Istituzioni di Analisi Superiore, primo modulo

Prova Scritta del 18 febbraio 1998

Svolgimento

1. a. I numeri ternari finiti sono quelli che moltiplicati per un'opportuna potenza di 3 danno un numero intero. Dovrebbe essere chiaro che l'insieme dei numeri ternari finiti è denso nei reali. D'altra parte tutti i numeri ternari finiti di $[0,1]$ appartengono ad E, perché la loro rappresentazione in base 3 termina con 0 periodico. Quindi E è denso in $[0,1]$.
Altro modo: sia $x \in [0,1[$, ed espandiamolo in base 3:

$$x = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{3^k}\,, \qquad \text{con } a_k \in \{0,1,2\} \text{ per ogni } k.$$

Sia x_n il troncamento della serie al termine n-esimo:

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{3^k}\,.$$

Allora $x_n \in E$ perché è un numero ternario finito, e $x_n \to x$ per $n \to +\infty$ perché

$$|x - x_n| = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{a_k}{3^k} \le \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{2}{3^k} = \frac{1}{3^n} \to 0 \quad \text{per } n \to +\infty\,,$$

(si è usata la formula della somma della serie geometrica) da cui si deduce che E è denso in $[0,1[$.
Sia E_{00} l'insieme dei punti di E la cui espansione ternaria comincia con 00 (dopo la virgola). Questi sono tutti e soli i punti di $[0,1/9[$, un intervallo non degenere, che è quindi equipotente a $\mathbb{R}$. L'insieme E da una parte è contenuto in $\mathbb{R}$, dall'altra contiene un sottinsieme equipotente ad $\mathbb{R}$. Quindi E è equipotente a $\mathbb{R}$ (proprietà generali della cardinalità). Per dimostrare che anche il complementare di E in $[0,1[$ ha la cardinalità del continuo, consideriamo l'insieme G di tutti i numeri di $[0,1[$ la cui espansione ternaria ha 1 come cifra in tutti i posti dispari, e 0 o 1 nei posti pari:

$$G := \left\{ x \in [0,1[\;\middle|\; x = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{3^k}\,,\ \text{con } a_k = 1 \text{ se } k \text{ è dispari, e } a_k \in \{0,1\} \text{ se } k \text{ è pari} \right\}.$$

Questo insieme G è contenuto in $[0,1[\setminus E$ perché non ci sono due zeri consecutivi nelle espansioni ternarie dei suoi punti, e la successione a_k è univocamente determinata dal punto x perché le cifre non sono definitivamente uguali a 2. Inoltre G è in corrispondenza biunivoca con l'insieme delle successioni a valori in $\{0,1\}$:

$$\text{a } x = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{3^k} \text{ in } G \text{ associamo la successione } b_k := a_{2k} \text{ per } k \ge 1\,.$$

A sua volta l'insieme delle successioni a valori in $\{0,1\}$ è in corrispondenza biunivoca con l'insieme $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ delle parti di $\mathbb{N}$:

$$\text{alla successione } b_k \text{ associamo l'insieme } S_x := \{n \in \mathbb{N} \mid b_k = 1\}\,.$$

Dovrebbe essere noto infine che $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ è equipotente a $\mathbb{R}$. Quindi anche $[0,1[\setminus E$ contiene un sottinsieme equipotente a $\mathbb{R}$.

b. La relazione $\sim$ è chiaramente riflessiva, simmetrica e transitiva. Sia $x \in E$ con $\varphi(x) = (a_1, a_2, \dots, a_n)$. La classe di equivalenza di x rispetto a $\sim$ è l'insieme dei numeri $y \in [0, 1[$ la cui rappresentazione ternaria ha come prime $n+2$ cifre $a_1, a_2, \dots, a_n, 0, 0$. Se moltiplichiamo x per 3^{n+2}, quelle cifre, che non dipendono da y, vengono spedite prima della virgola, e si possono eliminare con una sottrazione. Quello che rimane è la rappresentazione ternaria di un numero generico di $[0, 1[$. In altre parole, l'applicazione affine

$$y \mapsto 3^{n+2}y - \sum_{k=1}^{n} a_k 3^{n+2-k} .$$

pone $[x]_\sim$ in corrispondenza biunivoca con $[0, 1[$. Quindi $[x]_\sim$ è un intervallo di ampiezza $1/3^{n+2}$.

c. Una sequenza $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ è uguale a $\varphi(x)$ per un qualche $x \in E$ se e solo se ha due proprietà: (i) non ci sono due zeri consecutivi, e (ii) l'ultimo termine non è zero. Chiameremo tali sequenze "ammissibili". Si tratta di trovare quante sequenze ammissibili ci sono di una data lunghezza n.
Cominciamo con $n = 0$. Esiste una sola sequenza di cifre di lunghezza zero, cioè la sequenza vuota, ed è ammissibile. Questa corrisponde all'insieme dei numeri di $[0, 1[$ la cui espansione ternaria comincia con due zeri dopo la virgola, ossia all'intervallo $[0, 1/9[$. Quindi $t_0 = 1$. Passiamo al caso $n = 1$. Ci sono due possibili sequenze ammissibili: quella formata dal solo 1 e quella formata dal 2, che corrispondono rispettivamente agli intervalli $[1/3, 1/3 + 1/27[$ e $[2/3, 2/3 + 1/27[$. Quindi $t_1 = 2$.
Consideriamo ora $n \geq 2$. Ripartiamo le sequenze ammissibili di lunghezza n in quattro classi disgiunte:

1. ultima cifra 1, penultima cifra non 0;
2. ultima cifra 2, penultima cifra non 0;
3. ultima cifra 1, penultima cifra 0, terzultima cifra (se c'è) non 0;
4. ultima cifra 2, penultima cifra 0, terzultima cifra (se c'è) non 0.

n	t_n
0	1
1	2
2	6
3	16
4	44
5	120
6	328
7	896
8	2448
9	6688
10	18272

L'operazione di cancellare l'ultima cifra mette la classe 1 e la classe 2 in corrispondenza biunivoca con l'insieme delle sequenze ammissibili di lunghezza $n-1$. Invece la cancellazione delle ultime due cifre mette le classi 3 e 4 in corrispondenza biunivoca con l'insieme delle sequenze ammissibili di lunghezza $n-2$. Essendo le quattro classi disgiunte otteniamo la formula ricorsiva

$$t_n = 2t_{n-1} + 2t_{n-2} .$$

Vediamo per esempio le sequenze ammissibili di lunghezza 2:

$$\text{classi 1 e 2: } \{11, 12, 21, 22\}, \qquad \text{classi 3 e 4: } \{01, 02\},$$

quelle di lunghezza 3:

$$\text{classi 1 e 2: } \{011, 012, 021, 022, 111, 112, 121, 122, 211, 212, 221, 222\},$$
$$\text{classi 3 e 4: } \{101, 102, 201, 202\},$$

e quelle di lunghezza 4:

$$\begin{aligned}\text{classi 1 e 2: } \{&0111, 0112, 0121, 0122, 0211, 0212, 0221, 0222, 1011, 1012, 1021, 1022,\\ &1111, 1112, 1121, 1122, 1211, 1212, 1221, 1222, 2011, 2012, 2021, 2022,\\ &2111, 2112, 2121, 2122, 2211, 2212, 2221, 2222\},\\ \text{classi 3 e 4: } \{&0101, 0102, 0201, 0202, 1101, 1102, 1201, 1202, 2101, 2102, 2201, 2202\}.\end{aligned}$$

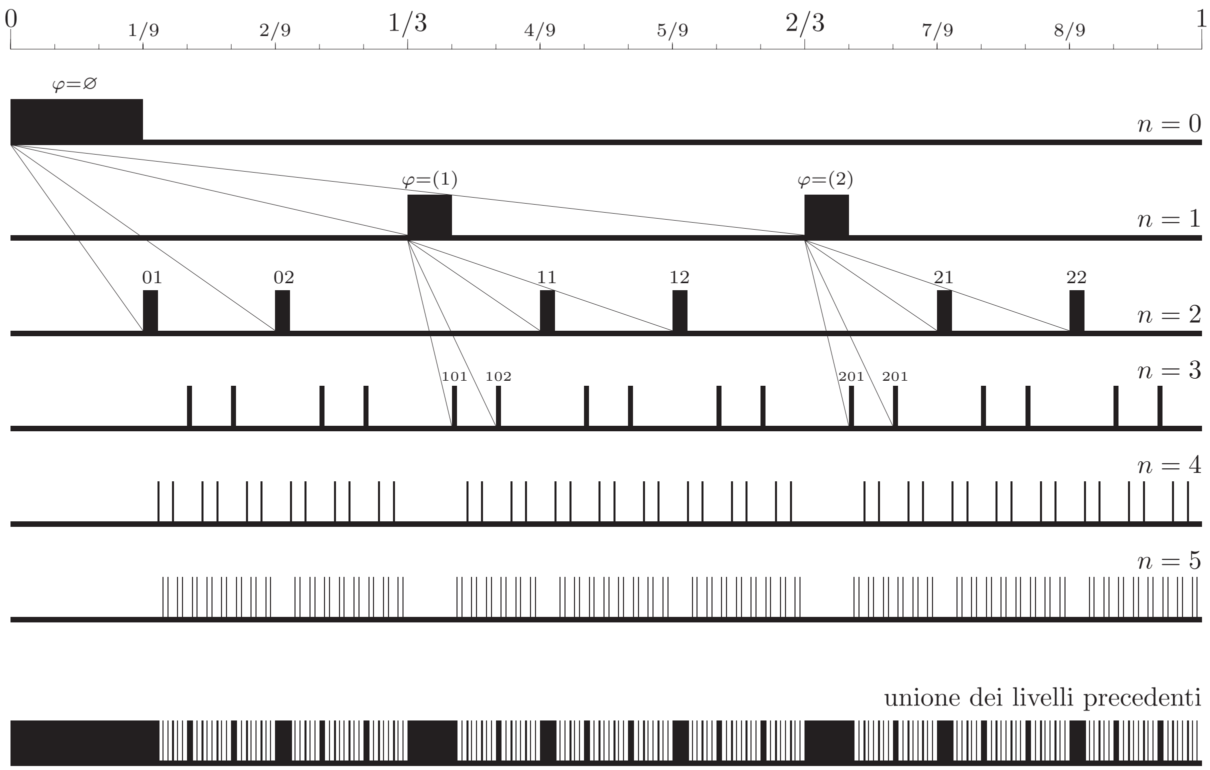
La forma ricorsiva della successione t_n è lineare, onde per cui t_n si può anche scrivere come combinazione lineare di successioni esponenziali della forma $n \mapsto r^n$. Per trovare le basi r basta sostituire $t_n = r^n$ nella relazione ricorsiva $t_n = 2t_{n-1} + 2t_{n-2}$, ottenendo

$$r^n = 2r^{n-1} + 2r^{n-2}, \qquad \text{da cui} \quad r^2 = 2r + 2, \quad \text{ossia} \quad r = 1 \pm \sqrt{3}.$$

I coefficienti della combinazione lineare $t_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n$ si trovano sostituendo i valori iniziali $t_0 = 1$, $t_1 = 2$. Saltando il conto si ricava infine

$$t_n = \frac{(1+\sqrt{3})^{n+1} - (1-\sqrt{3})^{n+1}}{2\sqrt{3}} .$$

Comunque questa formula non è indispensabile nel seguito.



d. L'insieme E è l'unione di una famiglia di intervalli non degeneri (semiaperti) a due a due disgiunti. Questa famiglia è (al più) numerabile perché a ognuno di tali intervalli possiamo associare iniettivamente un numero razionale preso nell'intervallo. Che non sia una famiglia finita possiamo dedurlo dal conteggio che abbiamo fatto nel punto precedente, secondo cui per ogni $n \geq 0$ c'è almeno uno di quegli intervalli con lunghezza esattamente $1/3^{n+2}$. In definitiva E è misurabile secondo Lebesgue (è boreliano), e la sua misura è la somma delle misure degli intervalli a due a due disgiunti di cui è l'unione:

$$\lambda(E) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t_n}{3^{n+2}} \,.$$

Per calcolare $\lambda(E)$ usiamo la relazione ricorsiva di t_n:

$$\lambda(E) = \frac{t_0}{3^2} + \frac{t_1}{3^3} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{t_n}{3^{n+2}} = \frac{1}{9} + \frac{2}{27} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2t_{n-1} + 2t_{n-2}}{3^{n+2}} = \frac{5}{27} + \frac{2}{3} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{t_{n-1}}{3^{(n-1)+2}} + \frac{2}{9} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{t_{n-2}}{3^{(n-2)+2}} =$$

$$= \frac{5}{27} + \frac{2}{3} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t_k}{3^{k+2}} + \frac{2}{9} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t_k}{3^{k+2}} = \frac{5}{27} + \frac{2}{3}\Big(\lambda(E) - \frac{1}{9}\Big) + \frac{2}{9}\lambda(E) = \frac{8}{9}\lambda(E) - \frac{1}{9} \,.$$

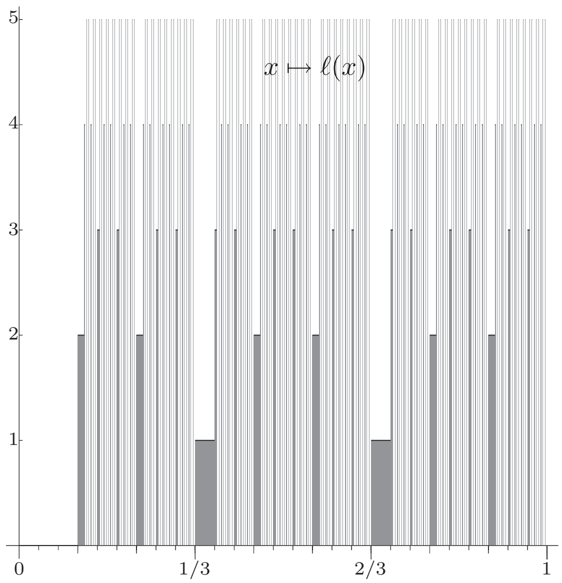
Dimenticando i membri intermedi si ricava un'equazione lineare in $\lambda(E)$ che si risolve subito:

$$\lambda(E) = 1 \,.$$

Allo stesso risultato si arriva anche usando la formula esponenziale per t_n e la formula per la somma della serie geometrica:

$$\lambda(E) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t_n}{3^{n+2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(1+\sqrt{3})^{n+1} - (1-\sqrt{3})^{n+1}}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{3^{n+2}} =$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{6\sqrt{3}} \sum_{n=0}^{+\infty} \Big(\Big(\frac{1+\sqrt{3}}{3}\Big)^{n+1} - \Big(\frac{1-\sqrt{3}}{3}\Big)^{n+1} \Big) = \\
&= \frac{1}{6\sqrt{3}} \cdot \left(\frac{\frac{1+\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{1+\sqrt{3}}{3}} - \frac{\frac{1-\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{1-\sqrt{3}}{3}} \right) = \frac{1}{6\sqrt{3}} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{3}}{3-1-\sqrt{3}} - \frac{1-\sqrt{3}}{3-1+\sqrt{3}} \right) = \\
&= \frac{1}{6\sqrt{3}} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} - \frac{1-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} \right) = \frac{1}{6\sqrt{3}} \cdot \frac{2+\sqrt{3}+2\sqrt{3}+3-(2-2\sqrt{3}-\sqrt{3}+3)}{4-3} = \\
&= \frac{1}{6\sqrt{3}} \cdot 6\sqrt{3} = 1\,.
\end{aligned}
$$



Potremmo riassumere la nostra scoperta dicendo che *quasi tutti i numeri fra 0 e 1 hanno almeno due zeri nella rappresentazione in base 3.* Introduciamo la funzione ℓ che conta le cifre che precedono la prima coppia di zeri:

$$\ell(x) := \text{ lunghezza di } \varphi(x), \text{ per } x \in E.$$

La misura dell'insieme degli $x \in E$ per i quali $\varphi(x)$ ha lunghezza n è

$$p_n := \lambda\big(\{x \in E \mid \ell(x) = n\}\big) = \frac{t_n}{3^{n+2}}\,.$$

Risulta che circa metà di E ha $\ell \le 6$ e l'altra metà ha $\ell \ge 7$, in quanto

$$
\begin{aligned}
\lambda\big(\{\ell \le 6\}\big) &= p_0 + \dots + p_6 = \frac{3217}{6561} \approx 0{,}4903 < \frac{1}{2}\,, \\
\lambda\big(\{\ell \le 7\}\big) &= p_0 + \dots + p_7 = \frac{10547}{19683} \approx 0{,}5358 > \frac{1}{2}\,.
\end{aligned}
$$

Scrivendo ℓ come combinazione lineare di funzioni caratteristiche si può esprimere il valor medio $\bar\ell$ come serie:

$$\ell(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n\chi_{\{\ell=n\}}(x)\,, \qquad \bar\ell = \frac{1}{\lambda(E)} \int_E \ell\,d\lambda = \int_E \left(\sum_{n=0}^{+\infty} n\chi_{\{\ell=n\}}\right) d\lambda = \sum_{n=0}^{+\infty} n\lambda\big(\{\ell=n\}\big) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\frac{t_n}{3^{n+2}}\,.$$

Per il calcolo esplicito di $\bar\ell$ usiamo la serie di potenze ausiliaria

$$u(s) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t_n}{3^{n+2}} s^n\,,$$

in modo tale che, almeno formalmente, $\bar\ell = u'(1)$. Poiché $t_n \sim (1+\sqrt{3})^n$ per $n \to +\infty$, la serie di $u(s)$ ha raggio di convergenza strettamente maggiore di 1: $3/(1+\sqrt{3}) \approx 1{,}098 > 1$, per cui è giustificata la derivazione termine a termine per $s = 1$. Si trova ora una formula elementare per $u(t)$ con lo stesso trucco con cui abbiamo calcolato $\lambda(E) = u(1)$:

$$
\begin{aligned}
u(s) &= \frac{t_0}{9} + \frac{t_1}{3^3}s + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{t_n}{3^{n+2}} s^n = \frac{1}{9} + \frac{2}{27}s + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2t_{n-1} + 2t_{n-2}}{3^{n+2}} s^n = \\
&= \frac{1}{9} + \frac{2s}{27} + \frac{2s}{3} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{t_{n-1}}{3^{(n-1)+2}} s^{n-1} + \frac{2s^2}{9} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{t_{n-2}}{3^{(n-2)+2}} s^{n-2} = \\
&= \frac{1}{9} + \frac{2s}{27} + \frac{2s}{3}\Big(u(s) - \frac{1}{9}\Big) + \frac{2s^2}{9}u(s) = \frac{1}{9} + \frac{2s}{27} + \frac{2s}{3}u(s) - \frac{2s}{27} + \frac{2s^2}{9}u(s) = \\
&= \frac{1}{9} + \frac{2s^2+6s}{9}u(s)\,.
\end{aligned}
$$

Si ricava quindi $u(s)$:

$$\frac{9-2s^2-6s}{9}u(s) = \frac{1}{9}\,,$$

da cui

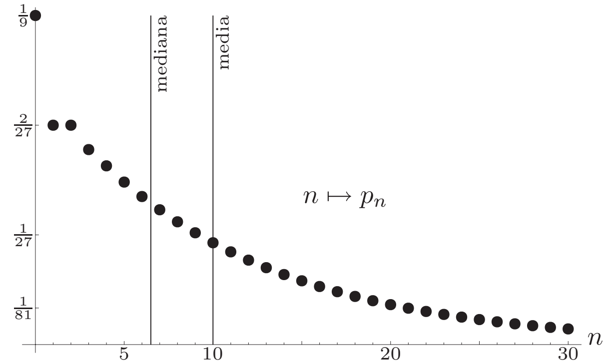
$$u(s) = \frac{1}{9-2s^2-6s}\,.$$

La derivata di u è:

$$u'(s) = -\frac{-4s-6}{(9-2s^2-6s)^2}\,,$$

da cui finalmente

$$\bar\ell = u'(1) = -\frac{-4-6}{(9-2-6)^2} = 10\,.$$



Riassumendo nel gergo del calcolo delle probabilità: abbiamo un'urna con tre palline numerate 0, 1 e 2, e facciamo estrazioni ripetute e indipendenti. Allora è quasi certo che prima o poi usciranno due zeri consecutivi. La quantità p_n che abbiamo introdotto è la probabilità che la prima coppia di zeri sia preceduta da n estrazioni. Ci si può aspettare che circa metà delle volte i primi due zeri usciranno dopo non più di 6 estrazioni (la mediana è è 6,5), e in media dopo dieci estrazioni.

2. Notazioni: λ_n è la misura di Lebesgue su $\mathbb{R}^n$, e $B(x,r]$ e $B(x,r[$ sono rispettivamente la palla chiusa e aperta in $\mathbb{R}^n$ di centro x e raggio $r \geq 0$. Poniamo

$$g(x) := \int_{x+D} f\,d\lambda_n \qquad \text{per } x \in \mathbb{R}^n\,.$$

Sia $x_k \in \mathbb{R}^n$ una successione convergente a $\bar x \in \mathbb{R}^n$. Vogliamo dimostrare che $g(x_k) \to g(x)$ per $k \to +\infty$. Riscriviamo gli integrali unificando gli insiemi di integrazione usando le funzioni caratteristiche:

$$g(\bar x) = \int_{\bar x + D} f\,d\lambda_n = \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{f(y)\chi_{\bar x+D}(y)}_{=:\bar h(y)}\,dy\,, \quad g(x_n) = \int_{x_k+D} f\,d\lambda_n = \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{f(y)\chi_{x_k+D}(y)}_{=:h_k(y)}\,dy\,,$$

dando un nome alle funzioni integrande:

$$h_k(y) := f(y)\chi_{x_k+D}(y)\,, \qquad h(y) := f(y)\chi_{\bar x+D}(y) \qquad \text{per } y \in \mathbb{R}^n\,.$$

Ora che gli insiemi di integrazione sono gli stessi ci proponiamo di vedere se si può passare al limite sotto il segno di integrale. Ma le funzioni integrande h_k convergono puntualmente a $\bar h$? Manipoliamo leggermente le formule:

$$\bar h(y) = \begin{cases} f(y) & \text{se } y \in \bar x + D, \text{ cioè se } y - \bar x \in D, \\ 0 & \text{se } y \notin \bar x + D, \text{ cioè se } y - \bar x \notin D, \end{cases}$$

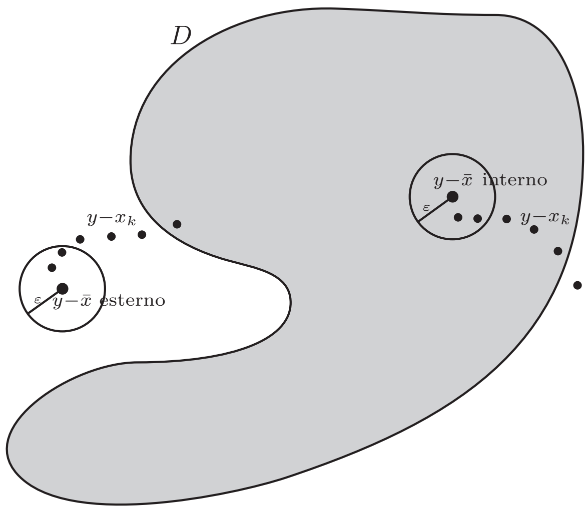
$$h_k(y) = \begin{cases} f(y) & \text{se } y \in x_k + D, \text{ cioè se } y - x_k \in D, \\ 0 & \text{se } y \notin x_k + D, \text{ cioè se } y - x_k \notin D. \end{cases}$$

Consideriamo un $y \in \mathbb{R}^n$ tale che $y - \bar x$ non sia sulla frontiera di D. Si danno due casi: $y - \bar x$ è punto interno o punto esterno. Supponiamo per cominciare che $y - \bar x$ sia un punto interno a D, cioè che esista $\varepsilon > 0$ tale che $B(y-\bar x, \varepsilon[\subset D$. Poiché $x_k \to \bar x$, il punto $y - x_k$ pure sarà in $B(y - \bar x, \varepsilon[$ per ogni k abbastanza grande. In particolare $y - x_k \in D$ definitivamente, per cui

$$h_k(y) = f(y) = \bar h(y) \quad \text{per ogni } k \text{ abbastanza grande.}$$

Similmente, supponiamo che $y - \bar x$ sia un punto esterno a D, cioè che esista $\varepsilon > 0$ tale che $B(y - \bar x, \varepsilon[\subset \mathbb{R}^n \setminus D$. Allora $y - x_k$ sarà pure in $B(y - \bar x, \varepsilon[$ per ogni n grande. In particolare $y - x_k \notin D$ definitivamente, per cui

$$h_k(y) = 0 = \bar h(y) \quad \text{per ogni } k \text{ abbastanza grande.}$$



Riassumendo:

$$h_k(y) = \bar{h}(y)$$

per ogni k abbastanza grande, purché $y-\bar{x} \notin \partial D$, cioè se $y \notin \bar{x}+\partial D$. Cosa succeda quando $y-\bar{x} \in \partial D$, cioè quando $y \in \bar{x}+\partial D$, non lo sappiamo, ma nemmeno ci interessa, perché $\bar{x}+\partial D$ ha misura nulla, in quanto traslato di ∂D, che ha misura nulla per ipotesi. Ne segue che

$$\lim_{k\to+\infty} h_k(y) = h(y) \qquad \text{per } \lambda_n\text{-quasi ogni } y \in \mathbb{R}^n\,.$$

Ora che abbiamo la convergenza quasi ovunque delle funzioni integrande h_k alla funzione che volevamo, cerchiamo di verificare le ipotesi del teorema di convergenza dominata. Sia $R > 0$ tale che la palla $B(0,R]$ contenga D e tutti i punti della successione x_k. Allora

$$\forall y \in \mathbb{R}^n \qquad \|y\| > 2R \quad\Rightarrow\quad y \notin x_k + D \quad\Rightarrow\quad h_k(y) = 0\,,$$

per cui

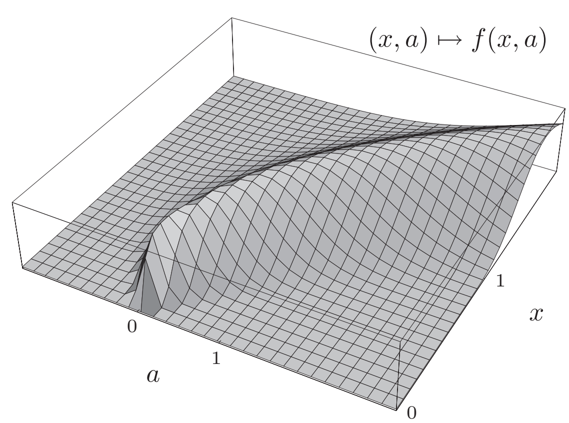
$$\big|h_k(y)\big| \le \big|f(y)\big|\chi_{B(0,2r]}(y) \qquad \text{per ogni } y \in \mathbb{R}^n\,.$$

La funzione $|f|\chi_{B(0,2R]}$ non dipende da k ed è in $L^1(\mathbb{R}^n)$ perché per ipotesi f è integrabile su ogni misurabile limitato. Si può dunque passare al limite sotto il segno di integrale:

$$\lim_{k\to+\infty} g(x_k) = \lim_{k\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^n} h_k\,d\lambda_n = \int_{\mathbb{R}^n}\lim_{k\to+\infty} h_k\,d\lambda_n = \int_{\mathbb{R}^n}\bar{h}\,d\lambda_n = g(\bar{x})\,.$$

3. Diamo un nome alla funzione integranda dipendente dal parametro a:

$$f(x,a) := \exp\Big(-\Big(x-\frac{a}{x}\Big)^2\Big) \qquad \text{per } x>0,\ a\in\mathbb{R}.$$

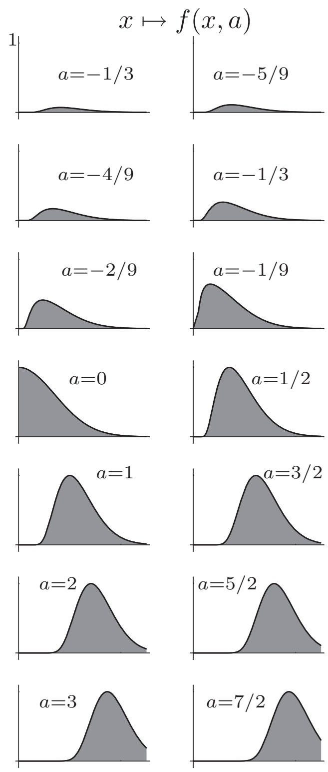


Come funzione di due variabili, f non è continua nell'origine. Però per ogni $a \in \mathbb{R}$ la $x \mapsto f(x,a)$ è una funzione continua e positiva. Quindi ha senso porre

$$g(a) := \int_0^{+\infty} f(x,a)\,dx \qquad \text{per } a \in \mathbb{R}\,.$$

La funzione g è ovunque finita perché da una parte $f(x,a)$ è limitata per $x \to 0$ e dall'altra il suo comportamento asintotico per $x \to +\infty$ è lo stesso della funzione $x \mapsto e^{-x^2}$, che ha integrale finito su $\mathbb{R}$:

$$\frac{f(x,a)}{e^{-x^2}} = \exp\Big(-\Big(x-\frac{a}{x}\Big)^2 + x^2\Big) = \exp\Big(2a - \frac{a^2}{x^2}\Big) \longrightarrow \exp 2a \in \,]0,+\infty[\quad \text{per } x \to +\infty\,.$$



Per capire se g è continua studiamo la $f(x,a)$ come funzione di a, con l'intenzione di dare maggiorazioni uniformi in a. Dunque

$$f(x,a) = \exp\Bigl(-\frac{(x^2-a)^2}{x^2}\Bigr) = \exp\Bigl(-x^2+2a-\frac{a^2}{x^2}\Bigr)\,.$$

L'estremo superiore per $a \in \mathbb{R}$

$$\sup_{a\in\mathbb{R}} f(x,a) \ge f(x,x^2) = 1$$

non ci va bene perché non è integrabile in x su $[0,+\infty[$. Proviamo a restringere a alla semiretta $]-\infty, M]$ con $M>0$:

$$\sup_{a\le M} f(x,a) = \sup_{a\le M} e^{-x^2+2a-a^2/x^2} \le e^{-x^2+2M}$$

Questa nuova maggiorazione va bene, perché la funzione all'ultimo membro ha integrale finito su $[0,+\infty[$. Visto che $f(x,a)$ è continua rispetto ad a per ogni $x>0$ possiamo concludere dal teorema della convergenza dominata che g è continua.
Ci poniamo il problema ora se g sia derivabile. Esiste ed è continua la derivata parziale di $f(x,a)$ rispetto ad a per $a\in\mathbb{R}$, $x>0$, ed è

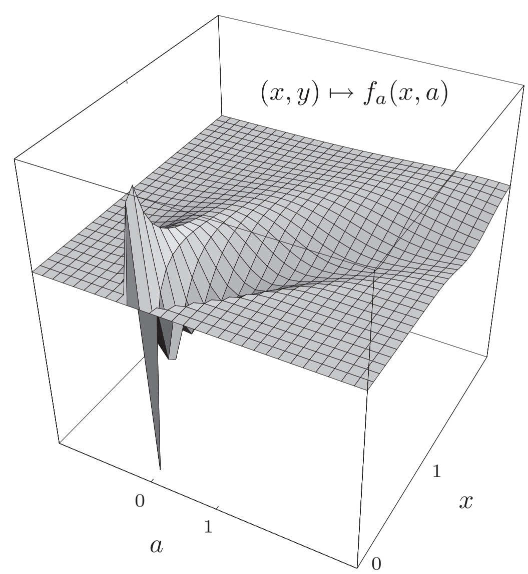
$$f_a(x,a) = \frac{\partial f}{\partial a}(x,a) = -2\Bigl(x-\frac{a}{x}\Bigr)\cdot\Bigl(-\frac{1}{x}\Bigr)\cdot\exp\Bigl(-\Bigl(x-\frac{a}{x}\Bigr)^2\Bigr) = \\ = 2f(x,a)\frac{x^2-a}{x^2}\,.$$

Per stabilire se $x \mapsto f_a(x,a)$ è integrabile su $]0,+\infty[$ vediamo l'andamento asintotico per $x\to 0^+$ e per $x\to+\infty$. Poiché il fattore $(x^2-a)/x^2$ tende a 1 per $x\to+\infty$ l'andamento per $x\to+\infty$ di $f_a(x,a)$ è lo stesso di $f(x,a)$. Passiamo all'andamento per $x\to 0^+$: se $a=0$

$$f_a(x,0) = 2f(x,0)\frac{x^2}{x^2} = 2f(x,0) \to 1 \quad \text{per } x\to 0^+\,,$$

mentre se $a\ne 0$

$$f_a(x,a) = 2(x^2-a)\frac{\exp\bigl(-(x-a/x)^2\bigr)}{x^2} = \\ = \underbrace{2(x^2-a)\exp(-x^2-a)}_{\to -2ae^{2a}}\,\frac{\exp(-a^2/x^2)}{x^2}\,.$$



Il limite dell'ultimo rapporto è 0, e si calcola con la sostituzione $y=1/x^2$ e la regola de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\exp(-a^2/x^2)}{x^2} = \lim_{y\to+\infty}\frac{e^{-a^2y}}{1/y} = \\ = \lim_{y\to+\infty}\frac{y}{e^{a^2y}} = \lim_{y\to+\infty}\frac{1}{a^2e^y} = 0\,.$$

Dunque per ogni $a\in\mathbb{R}$ la funzione $x\mapsto f_a(x,a)$ ha integrale finito su $]0,+\infty[$. Questo non garantisce però che g sia derivabile. Cerchiamo di dare maggiorazioni di $f_a(x,a)$ uniformi in a. Non c'è speranza se si prende l'estremo superiore per $a\in\mathbb{R}$:

$$\sup_{a\in\mathbb{R}}\bigl|f_a(x,a)\bigr| \ge \bigl|f_a(x,x)\bigr| = 2f(x,x)\frac{|x^2-x|}{x} = 2e^{-(x-1)^2}\frac{|x-1|}{x} \sim \frac{1}{x} \quad \text{per } x\to 0^+\,,$$

in quanto $1/x$ ha andamento non integrabile per $x \to 0^+$. Esattamente lo stesso calcolo mostra che neanche si può ottenere niente se si prende il sup per a in un intorno qualsiasi di 0. Proviamo allora con gli insiemi della forma $\{\varepsilon \le |a| \le M\}$ con $0 < \varepsilon < M < +\infty$. Ora dobbiamo accontentarci di maggiorare $-a^2/x^2$ con $-\varepsilon^2/x^2$ invece che con 0:

$$\sup_{\varepsilon \le |a| \le M} \bigl| f_a(x,a) \bigr| = \sup_{\varepsilon \le |a| \le M} 2e^{-x^2+2a-a^2/x^2} \left| 1 - \frac{a}{x^2} \right| \le 2e^{-x^2+2M-\varepsilon^2/x^2} \left(1 + \frac{M}{x^2} \right).$$

Finalmente la funzione di x all'ultimo membro è integrabile su $]0,+\infty[$, perché è infinitesima per $x \to 0^+$ (con gli stessi conti di prima) e va come e^{-x^2}/x^2 per $x \to +\infty$. La conclusione è che g è certamente derivabile sotto il segno di integrale per $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e si può derivare sotto il segno di integrale:

$$g'(a) = \int_0^{+\infty} f_a(x,a)\,dx = 2\int_0^{+\infty} \left(1 - \frac{a}{x^2}\right) \exp\left(-\left(x - \frac{a}{x}\right)^2\right) dx\,.$$

Si dà il caso che $g'(a)$ si possa calcolare in termini di funzioni elementari. Facciamo il cambio di variabile $y = a/x$ se $a > 0$: questo cambio è un diffeomorfismo decrescente di $]0,+\infty[$ in sé, e $dx = -(a/y^2)dy$:

$$\begin{aligned}
g'(a) &= 2\int_{+\infty}^{0} \left(1 - \frac{y^2}{a}\right) \exp\left(-\left(\frac{a}{y} - y\right)^2\right) \left(-\frac{a}{y^2}\right) dy = \\
&= -2\int_0^{+\infty} \left(-\frac{a}{y^2}\right) \left(1 - \frac{y^2}{a}\right) \exp\left(-\left(\frac{a}{y} - y\right)^2\right) dy = \\
&= -2\int_0^{+\infty} \left(1 - \frac{a}{y^2}\right) \exp\left(-\left(y - \frac{a}{y}\right)^2\right) dy = \\
&= -g'(a)\,.
\end{aligned}$$

Dunque $g'(a) = 0$ per ogni $a > 0$, cioè g è costante su $]0,+\infty[$. Ma g è anche continua su tutto $\mathbb{R}$. Quindi g è costante sulla semiretta chiusa $[0,+\infty[$. Dato che il valore di g in 0 è noto (integrale della gaussiana) abbiamo calcolato $g(a)$ per ogni $a \ge 0$:

$$g(a) = g(0) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \qquad \text{per ogni } a \ge 0\,.$$

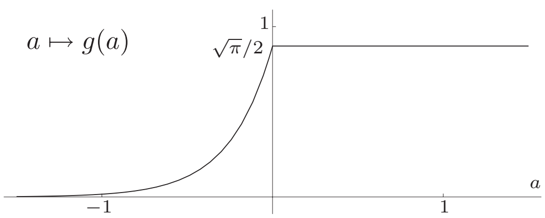
Per $a < 0$ cominciamo col decomporre in somma (entrambi gli addendi hanno integrale finito), notando che uno di loro è proprio $2g(a)$:

$$\begin{aligned}
g'(a) &= 2\int_0^{+\infty} \left(1 - \frac{a}{x^2}\right) \exp\left(-\left(x - \frac{a}{x}\right)^2\right) dx = \\
&= 2\int_0^{+\infty} \exp\left(-\left(x - \frac{a}{x}\right)^2\right) dx - 2a\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} \exp\left(-\left(x - \frac{a}{x}\right)^2\right) dx = \\
&= 2g(a) - 2a\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} \exp\left(-\left(x - \frac{a}{x}\right)^2\right) dx\,.
\end{aligned}$$

Nell'integrale che resta facciamo ancora il cambio di variabili $y = a/x$, che è un diffeomorfismo questa volta crescente fra $]0,+\infty[$ in $]-\infty,0[$, e usiamo il fatto che la funzione integranda è pari per riportarci all'intervallo $]0,+\infty[$:

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} \exp\left(-\left(x - \frac{a}{x}\right)^2\right) dx &= \int_{-\infty}^{0} \frac{y^2}{a^2} \exp\left(-\left(\frac{a}{y} - y\right)^2\right) \left(-\frac{a}{y^2}\right) dy = \\
&= -\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{0} \exp\left(-\left(\frac{a}{y} - y\right)^2\right) dy = -\frac{1}{a}\int_0^{+\infty} \exp\left(-\left(y - \frac{a}{y}\right)^2\right) dy = \\
&= -\frac{1}{a} g(a)\,.
\end{aligned}$$

In definitiva
$$g'(a) = 2g(a) + 2g(a) = 4g(a) \qquad \text{per ogni } a < 0\,.$$
In altre parole la g è soluzione dell'equazione differenziale $g' = 4g$ sul semiasse negativo e quindi è della forma
$$g(a) = ce^{4a} \qquad \text{per } a < 0, \text{ con } c \text{ costante.}$$
Per trovare la c basta passare al limite per $a \to 0^-$:
$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} = g(0) = \lim_{a\to 0^-} g(a) = \lim_{a\to 0^-} ce^{4a} = c\,.$$



È dimostrata allora la formula esplicita elementare per $g(a)$:
$$g(a) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{\pi}}{2} & \text{se } a \ge 0, \\[2mm] \dfrac{e^{4a}\sqrt{\pi}}{2} & \text{se } a < 0. \end{cases}$$
In effetti g non è derivabile nell'origine. Non si può passare al limite sotto il segno di integrale per $a \to +\infty$ perché i limiti sono diversi:
$$\lim_{a\to+\infty} \int_0^{+\infty} \exp\left(-\left(x - \frac{a}{x}\right)^2\right) dx = \lim_{a\to+\infty} g(a) = \lim_{a\to+\infty} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,,$$
mentre
$$\int_0^{+\infty} \lim_{a\to+\infty} \exp\left(-\left(x - \frac{a}{x}\right)^2\right) dx = \int_0^{+\infty} 0\,dx = 0\,.$$