Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 1996/97

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Istituzioni di Analisi Superiore, primo modulo

Prova Scritta del 2 febbraio 1998

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento di identità (se chiesto):

Chi porta quest'unico modulo ha 90 minuti di tempo e deve ritenersi a punteggio pieno con 15 punti. Chi porta due moduli ha tempo tre ore complessive e ha punteggio pieno con 30 punti, anche se presi tutti da uno solo dei due compiti.

1. a. Mostrare che alla funzione $f_\alpha(x,y) := e^{-\alpha xy} \operatorname{sen}^2 y$, dove $\alpha > 0$ è un parametro, si può applicare il teorema di Fubini-Tonelli rispetto all'integrazione secondo Lebesgue sull'insieme $E := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x > 1, y > 0\}$ e dedurne che vale la formula

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha y} \frac{\operatorname{sen}^2 y}{y} \, dy = \frac{1}{4} \ln\Big(1 + \frac{4}{\alpha^2}\Big) .$$

b. Si può dedurre dalla formula precedente, passando al limite per $\alpha \to 0^+$, che la funzione $y \mapsto (\operatorname{sen}^2 y)/y$ non è in $L^1(]0,+\infty[)$?

2. Sia X uno spazio topologico compatto di Hausdorff, e μ una misura positiva sulla famiglia $\mathcal{B}$ dei boreliani di X, tale che $\mu(X) = 1$. Sia $\mathcal{U}$ la famiglia di tutti i sottinsiemi compatti di X di misura 1, e sia $K^\cap$ l'intersezione di tutti gli elementi di $\mathcal{U}$.

a. Se $A, B \in \mathcal{B}$ e $\mu(A) = \mu(B) = 1$ allora $\mu(A \cap B) = 1$. Dedurre che l'intersezione di un numero finito di elementi di $\mathcal{U}$ è ancora un elemento di $\mathcal{U}$.

b. Sia V un insieme aperto contenente $K^\cap$. Dimostrare che V contiene almeno un elemento di $\mathcal{U}$.
(La famiglia $\{K \setminus V \ : \ K \in \mathcal{U}\}$ è composta di compatti e ha intersezione vuota...)

c. Supponiamo che la misura μ sia regolare dall'esterno, cioè che $\mu(A) = \inf\{\mu(W) \ : \ W \text{ aperto}, W \supseteq A\}$ per ogni $A \in \mathcal{B}$. Dimostrare allora che $K^\cap \in \mathcal{U}$. Questo $K^\cap$ è un compatto di misura 1 tale che ogni suo sottinsieme compatto proprio ha misura strettamente < 1.

d. Trovare esplicitamente $K^\cap$ nel caso $X := [0,1]$ con la misura di Lebesgue.

Punti: 8+2, 3+4+3

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

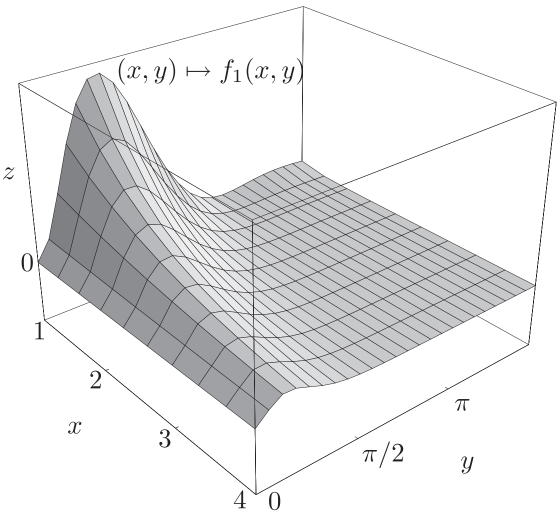
Istituzioni di Analisi Superiore, primo modulo

Prova Scritta del 2 febbraio 1998

Svolgimento

1. a. La funzione $f_\alpha(x,y) := e^{-\alpha xy}\,\mathrm{sen}^2\, y$ è chiaramente continua (quindi boreliana) e non negativa su tutto $\mathbb{R}^2$. Pertanto il teorema di Fubini-Tonelli si può applicare:

$$\int_D f_\alpha(x,y)\,dx\,dy = \int_0^{+\infty} dy \int_1^{+\infty} f_\alpha(x,y)\,dx = \\ = \int_1^{+\infty} dx \int_0^{+\infty} f_\alpha(x,y)\,dy\,.$$



L'integrale $\int_1^{+\infty} f_\alpha(x,y)\,dx$ per $y>0$ è facile:

$$\int_1^{+\infty} f_\alpha(x,y)\,dx = \int_1^{+\infty} e^{-\alpha xy}\,\mathrm{sen}^2\, y\,dx = \\ = (\mathrm{sen}^2\, y)\int_1^{+\infty} e^{-\alpha xy}\,dx = \\ = (\mathrm{sen}^2\, y)\left[\frac{e^{-\alpha xy}}{-\alpha y}\right]_{x=1}^{+\infty} = \\ = e^{-\alpha y}\frac{\mathrm{sen}^2\, y}{\alpha y}\,,$$

però la funzione $y \mapsto e^{-\alpha y}(\mathrm{sen}^2\, y)/(\alpha y)$ non ha primitive elementari. Lasciamo indicato l'integrale:

$$\int_D f_\alpha(x,y)\,dx\,dy = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha y}\frac{\mathrm{sen}^2\, y}{\alpha y}\,dy\,.$$

Cerchiamo una primitiva elementare di $y \mapsto f_\alpha(x,y)$. Usiamo la formula trigonometrica $\mathrm{sen}^2\, y = (1-\cos 2y)/2$:

$$\int f_\alpha(x,y)\,dy = \int e^{-\alpha xy}\,\mathrm{sen}^2\, y\,dy = \int e^{-\alpha xy}\frac{1-\cos 2y}{2}\,dy = \frac{1}{2}\int e^{-\alpha xy}\,dy - \frac{1}{2}\int e^{-\alpha xy}\cos 2y\,dy = \\ = -\frac{1}{2\alpha x}e^{-\alpha xy} - \frac{1}{2}\int e^{-\alpha xy}\cos 2y\,dy\,.$$

L'integrale $\int e^{-\alpha xy}\cos 2y\,dy$ si può calcolare elementarmente per parti due volte:

$$\int e^{-\alpha xy}\cos 2y\,dy = \int e^{-\alpha xy} d_y\frac{\mathrm{sen}\, 2y}{2} = e^{-\alpha xy}\frac{\mathrm{sen}\, 2y}{2} - \int \frac{\mathrm{sen}\, 2y}{2} d_y e^{-\alpha xy} = \\ = e^{-\alpha xy}\frac{\mathrm{sen}\, 2y}{2} - \int \frac{\mathrm{sen}\, 2y}{2}(-\alpha x)e^{-\alpha xy}dy = e^{-\alpha xy}\frac{\mathrm{sen}\, 2y}{2} + \frac{\alpha x}{2}\int e^{-\alpha xy}\,\mathrm{sen}\, 2y\,dy = \\ = e^{-\alpha xy}\frac{\mathrm{sen}\, 2y}{2} + \frac{\alpha x}{2}\int e^{-\alpha xy}\, d_y\frac{-\cos 2y}{2} = \\ = e^{-\alpha xy}\frac{\mathrm{sen}\, 2y}{2} + \frac{\alpha x}{2}\left(e^{-\alpha xy}\frac{-\cos 2y}{2} - \int \frac{-\cos 2y}{2} d_y e^{-\alpha xy}\right) = \\ = e^{-\alpha xy}\frac{\mathrm{sen}\, 2y}{2} - \alpha x e^{-\alpha xy}\frac{\cos 2y}{4} + \frac{\alpha x}{4}\int (\cos 2y)(-\alpha x)e^{-\alpha xy}\,dy = \\ = e^{-\alpha xy}\frac{\mathrm{sen}\, 2y}{2} - \alpha x e^{-\alpha xy}\frac{\cos 2y}{4} - \frac{\alpha^2 x^2}{4}\int e^{-\alpha xy}\cos 2y\,dy\,.$$

L'ultimo integrale è quello del primo membro, per cui si ricava

$$\Big(1+\frac{\alpha^2x^2}{4}\Big)\int e^{-\alpha xy}\cos 2y\,dy=\frac{\operatorname{sen}2y}{2}e^{-\alpha xy}-\alpha x\frac{\cos 2y}{4}e^{-\alpha xy}\,,$$

ossia

$$\int e^{-\alpha xy}\cos 2y\,dy=\frac{4}{4+\alpha^2x^2}\Big(\frac{\operatorname{sen}2y}{2}e^{-\alpha xy}-\alpha x\frac{\cos 2y}{4}e^{-\alpha xy}\Big)\,.$$

Ci si poteva anche arrivare sapendo a priori che gli integrali del tipo $\int e^{\beta y}\cos 2y\,dy$ hanno la forma $(A\cos 2y+B\operatorname{sen}2y)e^{\beta y}$. Derivando $(A\cos 2y+B\operatorname{sen}2y)e^{-\alpha xy}$ rispetto a y si ha

$$\begin{aligned}\frac{d}{dy}\big((A\cos 2y+B\operatorname{sen}2y)e^{-\alpha xy}\big)&=-\alpha x(A\cos 2y+B\operatorname{sen}2y)e^{-\alpha xy}+(-2A\operatorname{sen}2y+2B\cos 2y)e^{-\alpha xy}=\\&=\big((2B-\alpha xA)\cos 2y-(2A+\alpha xB)\operatorname{sen}2y\big)e^{-\alpha xy}\,.\end{aligned}$$

Uguagliando con la funzione integranda si hanno le equazioni nei coefficienti A,B:

$$\begin{cases}2A+\alpha xB=0\\2B-\alpha xA=1\end{cases}\qquad\text{cioè}\qquad\begin{cases}A=-\dfrac{\alpha x}{4+\alpha^2x^2}\\[2mm]B=\dfrac{2}{4+\alpha^2x^2}\end{cases}$$

Sostituendo

$$\int e^{-\alpha xy}\cos 2y\,dy=\Big(-\frac{\alpha x}{4+\alpha^2x^2}\cos 2y+\frac{2}{4+\alpha^2x^2}\operatorname{sen}2y\Big)e^{-\alpha xy}\,,$$

che dovrebbe coincidere colla formula già trovata a meno di una costante additiva. Si vede che coincide davvero, con costante nulla. Tornando indietro

$$\begin{aligned}\int f_\alpha(x,y)\,dy&=-\frac{1}{2\alpha x}e^{-\alpha xy}-\frac12\int e^{-\alpha xy}\cos 2y\,dy=\\&=-\frac{1}{2\alpha x}e^{-\alpha xy}-\frac12\Big(-\frac{\alpha x}{4+\alpha^2x^2}\cos 2y+\frac{2}{4+\alpha^2x^2}\operatorname{sen}2y\Big)e^{-\alpha xy}=\\&=\frac{e^{-\alpha xy}}{2}\Big(\frac{\alpha x}{4+\alpha^2x^2}\cos 2y-\frac{2}{4+\alpha^2x^2}\operatorname{sen}2y-\frac{1}{\alpha x}\Big)\,.\end{aligned}$$

Quindi, dato che a noi interessa il caso $x>0$,

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}f_\alpha(x,y)\,dy&=\Big[\frac{e^{-\alpha xy}}{2}\Big(\frac{\alpha x}{4+\alpha^2x^2}\cos 2y-\frac{2}{4+\alpha^2x^2}\operatorname{sen}2y-\frac{1}{\alpha x}\Big)\Big]_{y=0}^{+\infty}=\\&=0-\frac{e^0}{2}\Big(\frac{\alpha x}{4+\alpha^2x^2}-\frac{1}{\alpha x}\Big)=\\&=\frac{1}{2\alpha x}-\frac{\alpha x}{8+2\alpha^2x^2}\,.\end{aligned}$$

Per fortuna quest'ultima espressione è integrabile elementarmente in x:

$$\int\Big(\frac{1}{2\alpha x}-\frac{\alpha x}{8+2\alpha^2x^2}\Big)dx=\frac{1}{2\alpha}\ln x-\frac{1}{4\alpha}\ln\big(8+2\alpha^2x^2\big)=\frac{1}{4\alpha}\ln\frac{x^2}{8+2\alpha^2x^2}\,,$$

per cui

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty}\Big(\frac{1}{2\alpha x}-\frac{\alpha x}{8+2\alpha^2x^2}\Big)dx&=\Big[\frac{1}{4\alpha}\ln\frac{x^2}{8+2\alpha^2x^2}\Big]_{x=1}^{+\infty}=\frac{1}{4\alpha}\ln\frac{1}{2\alpha^2}-\frac{1}{4\alpha}\ln\frac{1}{8+2\alpha^2}=\\&=\frac{1}{4\alpha}\ln\frac{8+2\alpha^2}{2\alpha^2}=\frac{1}{4\alpha}\ln\Big(1+\frac{4}{\alpha^2}\Big)\,.\end{aligned}$$

Uguagliando i risultati ottenuti iterando gli integrali nei due ordini:

$$\int_D f_\alpha(x,y)\,dx\,dy = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha y}\frac{\operatorname{sen}^2 y}{\alpha y}\,dy = \frac{1}{4\alpha}\ln\Big(1+\frac{4}{\alpha^2}\Big).$$

In particolare

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha y}\frac{\operatorname{sen}^2 y}{y}\,dy = \frac{1}{4}\ln\Big(1+\frac{4}{\alpha^2}\Big) \qquad \text{per ogni } \alpha > 0\,.$$

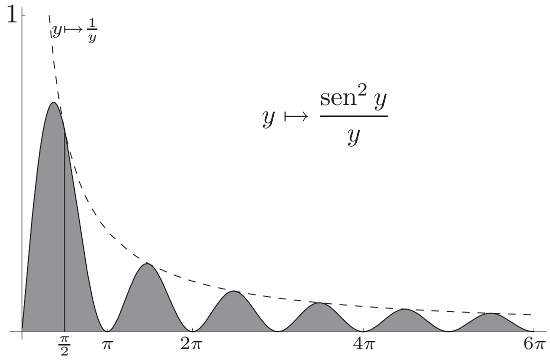
b. Per $\alpha \to 0^+$ vale

$$\lim_{\alpha\to 0^+} e^{-\alpha y}\frac{\operatorname{sen}^2 y}{y} = \frac{\operatorname{sen}^2 y}{y} \qquad \text{per ogni } y \neq 0\,,$$

ed $e^{-\alpha y}\operatorname{sen}^2 y/y \ge 0$ per ogni α. Inoltre la funzione $\alpha \mapsto e^{-\alpha y}\operatorname{sen}^2 y/y$ è decrescente per ogni $y > 0$ fissato. Prendiamo una qualsiasi successione α_n che tenda a 0 decrescendo (per esempio $\alpha_n = 1/n$). La successione di funzioni $n \mapsto e^{-\alpha_n y}\operatorname{sen}^2 y/y$ risulta crescente e positiva, per cui possiamo applicare il teorema della convergenza monotona:

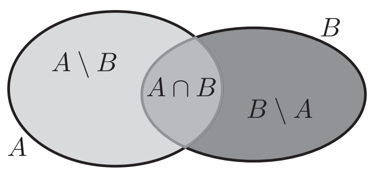
$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{sen}^2 y}{y}\,dy &= \int_0^{+\infty}\Big(\lim_{n\to+\infty} e^{-\alpha_n y}\frac{\operatorname{sen}^2 y}{y}\Big)dy = \\ &= \lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-\alpha_n y}\frac{\operatorname{sen}^2 y}{y}\,dy = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{4}\ln\Big(1+\frac{4}{\alpha_n^2}\Big) = +\infty\,.\end{aligned}$$

Il fatto che la funzione $y \mapsto (\operatorname{sen}^2 y)/y$ non sia in $L^1(]0,+\infty[)$ si può anche verificare più direttamente con una minorazione su ciascun intervallo del tipo $]n\pi,(n+1)\pi]$:



$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{sen}^2 y}{y}\,dy &= \sum_{n\ge 0}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\operatorname{sen}^2 y}{y}\,dy \ge \\ &\ge \sum_{n\ge 0}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\operatorname{sen}^2 y}{(n+1)\pi}\,dy = \\ &= \sum_{n\ge 0}\frac{1}{(n+1)\pi}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\operatorname{sen}^2 y\,dy = \\ &= \sum_{n\ge 0}\frac{1}{(n+1)\pi}\int_0^{\pi}\operatorname{sen}^2 y\,dy = \\ &= \underbrace{\Big(\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\operatorname{sen}^2 y\,dy\Big)}_{>0}\cdot\underbrace{\sum_{n\ge 0}\frac{1}{n+1}}_{=+\infty} = +\infty\end{aligned}$$

2. a. Siano $A, B \in \mathcal{B}$ tali che $\mu(A) = \mu(B) = 1$. Poiché $A \subseteq A\cup B \subseteq X$ abbiamo la disuguaglianza



$$1 = \mu(A) \le \mu(A\cup B) \le \mu(X) = 1\,,$$

per cui $\mu(A\cup B) = 1$. L'insieme $A\cup B$ è l'unione dei tre insiemi $A\cap B$, $A\setminus B$ e $B\setminus A$, che sono a due a due disgiunti (e boreliani). Quindi

$$1 = \mu(A\cup B) = \underbrace{\mu(A\cap B) + \mu(A\setminus B)}_{=\mu(A)} + \mu(B\setminus A) = \mu(A) + \mu(B\setminus A) = 1 + \mu(B\setminus A)\,,$$

da cui ricaviamo che $\mu(B\setminus A) = 0$. Analogamente, scambiando fra loro A e B, vediamo che $\mu(A\setminus B) = 0$. Pertanto

$$1 = \mu(A\cup B) = \mu(A\cap B) + \mu(A\setminus B) + \mu(B\setminus A) = \mu(A\cap B) + 0 + 0 = \mu(A\cap B)\,.$$

Se $K_1, K_2 \in \mathcal{U}$ allora $K_1\cap K_2$ è compatto essendo intersezione di due compatti in uno spazio di Hausdorff, ed ha misura 1 per la proprietà precedente. Quindi anche $K_1\cap K_2 \in \mathcal{U}$. Per induzione si vede che l'intersezione di un numero finito di elementi di $\mathcal{U}$ è ancora elemento di $\mathcal{U}$.

b. Sia V un insieme aperto contenente $K^\cap := \bigcap \mathcal{U}$. Consideriamo la famiglia di insiemi $\{K \setminus V \ :\ K \in \mathcal{U}\}$. Se K è compatto (e quindi chiuso, perché X è di Hausdorff) e V è aperto, $K \setminus V$ è un sottinsieme chiuso del compatto K, e quindi anche $K \setminus V$ è compatto. Pertanto tutti gli elementi della famiglia $\{K \setminus V \ :\ K \in \mathcal{U}\}$ sono compatti. L'intersezione della famiglia è vuota:

$$\bigcap_{K \in \mathcal{U}} (K \setminus V) = \Big(\bigcap_{K \in \mathcal{U}} K\Big) \setminus V = K^\cap \setminus V = \varnothing\,.$$

Quando in uno spazio di Hausdorff una famiglia di compatti ha intersezione vuota, esiste una sottofamiglia finita con intersezione vuota. Nel nostro caso esistono dunque $K_1, \dots, K_n \in \mathcal{U}$ tali che

$$\varnothing = \bigcap_{i=1}^{n} \big(K_i \setminus V\big) = \big(K_1 \cap K_2 \cap \cdots \cap K_n\big) \setminus V\,.$$

Poniamo $\bar{K} := K_1 \cap K_2 \cap \cdots \cap K_n$. Dire che $\bar{K} \setminus V = \varnothing$ equivale a dire che $\bar{K} \subseteq V$. D'altra parte per il punto precedente $\bar{K} \in \mathcal{U}$. Quindi V contiene un elemento di $\mathcal{U}$.

c. Supponiamo che la misura μ sia regolare dall'esterno, ossia che $\mu(A) = \inf\{\mu(W) \ :\ W \text{ aperto}, W \supseteq A\}$ per ogni $A \in \mathcal{B}$. Vediamo se $K^\cap$ appartiene o no a $\mathcal{U}$. Innanzitutto $K^\cap$ è compatto. Per trovare se poi ha misura 1, prendiamo un qualsiasi aperto W che lo contenga. Per il punto **b** esiste $\bar{K} \in \mathcal{U}$ tale che $W \supseteq \bar{K}$. Allora abbiamo le inclusioni

$$K^\cap \subseteq \bar{K} \subseteq W \subseteq X\,.$$

Prendendo le misure otteniamo le disuguaglianze

$$\mu(K^\cap) \le \mu(\bar{K}) \le \mu(W) \le \mu(X) = 1\,.$$

Per definizione di $\mathcal{U}$, la misura di $\bar{K}$ è 1. Dunque $\mu(W) = 1$. Infine

$$\mu(K^\cap) = \inf\big\{\mu(W) \ :\ W \text{ aperto}, W \supseteq A\big\} = \inf\{1\} = 1\,,$$

da cui concludiamo che $K^\cap \in \mathcal{U}$. Insomma, la famiglia dei compatti di misura 1 ha un elemento minimo per l'inclusione.

d. Nell'esempio $X := [0,1]$ con la misura di Lebesgue, dimostriamo che $\mathcal{U} = \{X\}$ e che quindi $K^\cap$ è X stesso. Infatti se K è un qualsiasi sottinsieme compatto *proprio* di $[0,1]$, la differenza $[0,1] \setminus K$ è aperta in X, cioè esiste un aperto V di $\mathbb{R}$ tale che $[0,1] \setminus K = [0,1] \cap V$. L'aperto V è a sua volta unione di una famiglia di intervalli aperti non degeneri. Almeno uno di questi intervalli aperti deve intersecare $[0,1]$, e l'intersezione è un intervallo non degenere. Insomma $[0,1] \cap V$ ha misura > 0, e quindi K ha misura < 1.