Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Istituzioni di Analisi Superiore, primo modulo

Prova Scritta del 4 dicembre 1997

Cognome e Nome:

Matricola: Documento di identità (se chiesto):

Chi porta quest'unico modulo ha 90 minuti di tempo e deve ritenersi a punteggio pieno con 15 punti. Chi porta due moduli ha tempo tre ore complessive e ha punteggio pieno con 30 punti, anche se presi tutti da uno solo dei due compiti.

1. Calcolare il seguente limite, a seconda del valore del parametro $a \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{2\pi} t^a n^2 \Big(1 - \cos \frac{t}{n}\Big)\, dt \,.$$

2. Sia $(X, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura positiva e con $\mu(X) < +\infty$. Siano $f_n\colon X \to \mathbb{R}$ per $n \in \mathbb{N}$ e $f\colon X \to \mathbb{R}$ delle funzioni misurabili. Si dice che la successione f_n tende a f "in misura" se

$$\text{per ogni } \delta > 0 \text{ si ha che } \lim_{n\to+\infty} \mu\Big(\big\{x \in X \;:\; |f_n(x) - f(x)| > \delta\big\}\Big) = 0\,.$$

a. Dimostrare che se $f_n \to f$ μ-quasi ovunque, allora $f_n \to f$ in misura. (Trasformare la misura dell'insieme in un integrale e usare la convergenza d...).

b. Più in generale, f_n potrebbe non convergere quasi ovunque, ma supponiamo che da ogni sua sottosuccessione f_{n_k} possiamo estrarre un'ulteriore sottosuccessione $f_{n_{k_j}}$ che converge a f μ-quasi ovunque. Dimostrare che allora $f_n \to f$ in misura.

c. Supponiamo che $f_n \to f$ in misura. Dimostrare che esiste una successione di interi positivi strettamente crescente $k \mapsto n_k$ tale che se poniamo $E_k := \{x \in X \;:\; |f_{n_k}(x) - f(x)| > 1/k\}$ si ha $\mu(E_k) < 1/2^k$. Per tale n_k la successione f_{n_k} tende a f μ-quasi ovunque.
(Esprimere l'insieme dei punti dove f_{n_k} non tende a f come unione, intersezione ecc. numerabile di insiemi del tipo $\{|f_{n_k} - f| > \varepsilon\}$ e confrontare con gli E_k).

d. Dimostrare che se $f_n \to f$ in misura allora da ogni sottosuccessione di f_n possiamo estrarre un'ulteriore sottosuccessione che tende a f μ-quasi ovunque.

e. Supponiamo che $f_n, f \in L^1(\mu)$. Dimostrare che se $f_n \to f$ nella norma di $L^1(\mu)$ allora $f_n \to f$ in misura, ma non viceversa.

Punti: 6, 3+2+7+2+4

Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 1996/97

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Istituzioni di Analisi Superiore, primo modulo

Prova Scritta del 4 dicembre 1997

Svolgimento

1. Per cominciare l'integrale ha senso, in quanto per $t \in\ ]0, 2\pi]$ la funzione integranda $f_{a,n}(t) := t^a n^2(1 - \cos(t/n))$ è definita e non negativa ($1 - \cos x \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$). Per $t = 0$ e $a \leq 0$ non è definito t^a, ma $\{0\}$ ha misura nulla secondo Lebesgue. Non ha l'aria però di essere un integrale elementare, eccetto quando a è intero ≥ 0.

Vediamo di calcolare il limite puntuale della successione di funzioni integrande, se esiste. Per questo ci rifacciamo al limite fondamentale $(1 - \cos x)/x^2 \to 0$ per $x \to 0$, oppure alla formula di Taylor $\cos x = 1 - x^2/2 + o(x^3)$, sempre per $x \to 0$, o, se si preferisce, alla regola de L'Hôpital:

$$\lim_{n\to+\infty} t^a n^2\Big(1 - \cos\frac{t}{n}\Big) = \lim_{n\to+\infty} t^{a+2}\frac{1-\cos\frac{t}{n}}{(t/n)^2} = t^{a+2}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{t^{a+2}}{2}\,.$$

Abbiamo dunque il nostro candidato a essere il limite cercato:

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{2\pi} t^a n^2\Big(1 - \cos\frac{t}{n}\Big)\,dt \overset{?}{=} \int_0^{2\pi}\lim_{n\to+\infty} t^a n^2\Big(1 - \cos\frac{t}{n}\Big)\,dt = \int_0^{2\pi}\frac{t^{a+2}}{2}\,dt =$$
$$= \begin{cases} +\infty & \text{se } a+2 \leq -1,\\ \dfrac{(2\pi)^{a+3}}{2(a+3)} & \text{se } a+2 > -1.\end{cases}$$

Per dimostrare che le cose stanno proprio così scriviamo la funzione integranda come

$$t^a n^2\Big(1 - \cos\frac{t}{n}\Big) = t^{a+2}\frac{1-\cos\frac{t}{n}}{(t/n)^2} = t^{a+2}\varphi(t/n)\,, \qquad \text{dove} \quad \varphi(x) := \frac{1-\cos x}{x^2}\,.$$

La funzione φ è continua su $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, ha limite $1/2$ nell'origine, e tende a 0 all'infinito. Quindi φ è limitata: esiste $c > 0$ tale che $|\varphi(x)| \leq c$ per ogni $x \neq 0$.

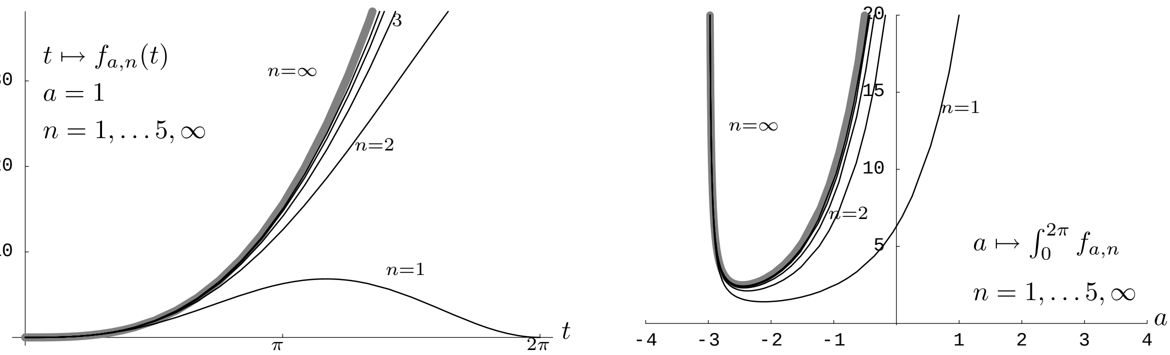
Il caso $a + 2 \leq -1$ è facile, in quanto per $x \to 0$ la funzione $t^{a+2}\varphi(t/n)$ è asintotica a $t^{a+2}/2$, e quindi ha integrale $+\infty$. La nostra successione di integrali tende all'infinito in quanto ognuno degli integrali della successione è già $+\infty$.

Nel caso $a + 2 > -1$ proviamo a maggiorare la funzione integranda in modo indipendente da n:

$$\big|t^{a+2}\varphi(t/n)\big| \leq c t^{a+2}\,,$$

e $t \mapsto ct^{a+2}$ ha integrale finito su $]0, 2\pi]$, cioè è in $L^1(]0, 2\pi])$. Dunque si può applicare il teorema della convergenza dominata e si può passare al limite sotto il segno di integrale.

La figura seguente a sinistra mostra i grafici delle funzioni integrande con $a = 1$ e n che va da 1 a 5, insieme con la funzione limite puntuale per $n \to +\infty$ in grigio e spessore maggiore. A destra ci sono i grafici degli integrali come funzioni di a sempre per n che va da 1 a 5, insieme con la funzione integrale limite in grigio.



2. a. Supponiamo che $f_n \to f$ μ-quasi ovunque. Possiamo riscrivere la misura di $\{|f_n - f| > \delta\}$ come integrale della funzione caratteristica:
$$\mu\Big(\big\{|f_n - f| > \delta\big\}\Big) = \int_X \chi_{\{|f_n - f|>\delta\}}\, d\mu\,.$$
Fissato $\delta > 0$, per μ-quasi ogni $x \in X$ si ha che $f_n(x) \to f(x)$, per cui $|f_n(x) - f(x)| \le \delta$ definitivamente, e quindi $\chi_{\{|f_n-f|>\delta\}}(x) = 0$ definitivamente. In particolare
$$\chi_{\{|f_n-f|>\delta\}} \to 0 \qquad \mu\text{-quasi ovunque.}$$
Inoltre la convergenza di $\chi_{\{|f_n-f|>\delta\}}$ è dominata:
$$|\chi_{\{|f_n-f|>\delta\}}| \le 1 \in L^1(\mu)$$
in quanto $\int_X 1\, d\mu = \mu(X) < +\infty$. Dunque possiamo passare al limite sotto il segno di integrale e ottenere quello che volevamo:
$$\lim_{n\to+\infty} \mu\Big(\big\{x \in X \ :\ |f_n(x) - f(x)| > \delta\big\}\Big) = \lim_{n\to+\infty} \int_X \chi_{\{|f_n-f|>\delta\}}\, d\mu =$$
$$= \int_X \lim_{n\to+\infty} \chi_{\{|f_n-f|>\delta\}}\, d\mu = \int_X 0\, d\mu = 0\,.$$

b. Fissato $\delta > 0$ sia $\alpha := \max\lim_{n\to+\infty} \mu(\{|f_n - f| > \delta\})$. Esiste una sottosuccessione f_{n_k} tale che $\mu(\{|f_{n_k} - f| > \delta\}) \to \alpha$. Per ipotesi da questa sottosuccessione possiamo estrarne un'altra, $f_{n_{k_j}}$ che converge μ-quasi ovunque a f. Ma allora per il punto precedente $f_{n_{k_j}} \to f$ in misura, e quindi
$$\alpha = \lim_{k\to+\infty} \mu\big(\{|f_{n_k} - f| > \delta\}\big) = \lim_{j\to+\infty} \mu\big(\{|f_{n_{k_j}} - f| > \delta\}\big) = 0\,.$$
Essendo $\alpha = 0$ abbiamo che $\min\lim_{n\to+\infty} \mu(\{|f_n - f| > \delta\}) \ge 0$ concludiamo che esiste il $\lim_{n\to+\infty} \mu(\{|f_n - f| > \delta\})$ e vale 0. Dunque $f_n \to f$ in misura.

c. Supponiamo che $f_n \to f$ in misura. Poiché per definizione per ogni $\delta > 0$ si ha che $\lim_{n\to+\infty} \mu(\{|f_n - f| > \delta\}) = 0$, fissato $k > 0$ intero esistono infiniti valori di n per i quali
$$\mu\big(\{|f_n - f| > 1/k\}\big) < 1/2^k\,.$$
Per $k = 1$ la scelta fra questi per decidere n_1 è arbitraria. Quando abbiamo scelto $n_1, \dots, n_k$ possiamo prendere come n_{k+1} un qualsiasi di quei valori che sia $> n_k$. In questo modo la successione $k \mapsto n_k$ è strettamente crescente e posto $E_k := \{|f_{n_k} - f| > 1/k\}$ si ha $\mu(E_k) < 1/2^k$.
Sia ora N l'insieme dei punti di X per i quali $f_{n_k}(x)$ non tende a $f(x)$, cioè per i quali
$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall N > 0 \quad \exists k \ge N \qquad \big|f_{n_k}(x) - f(x)\big| > \varepsilon\,.$$
Vogliamo dimostrare che N ha misura nulla. Possiamo discretizzare ε:
$$N = \Big\{x \in X \ :\quad \exists j \in \mathbb{N} \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \exists k \ge N \quad \big|f_{n_k}(x) - f(x)\big| > 1/j\Big\} =$$
$$= \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \bigcap_{N\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\ge N} \big\{|f_{n_k} - f| > 1/j\big\} \subseteq \quad \text{(riduco la famiglia da intersecare da } N \in \mathbb{N} \text{ a } N \ge j)$$
$$\subseteq \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \bigcap_{N\ge j} \bigcup_{k\ge N} \big\{|f_{n_k} - f| > 1/j\big\} \subseteq$$
$$\subseteq \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \bigcap_{N\ge j} \bigcup_{k\ge N} \big\{|f_{n_k} - f| > 1/k\big\} = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \bigcap_{N\ge j} \bigcup_{k\ge N} E_k\,,$$

in quanto se $k \geq N \geq j$ si ha $1/k \leq 1/N \leq 1/j$ e dunque $\{|f_{n_k} - f| > 1/j\} \subseteq \{f_{n_k} - f| > 1/k\} = E_k$. Ora valutiamo le misure:

$$\mu\Big(\bigcup_{k\geq N} E_k\Big) \leq \sum_{k\geq N} \mu(E_k) \leq \sum_{k\geq N} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{N-1}}\,.$$

Poiché

$$\bigcap_{N\geq j}\bigcup_{k\geq N} E_k \subseteq \bigcup_{k\geq N} E_k \qquad \text{per ogni } N \geq j\,,$$

si ha che

$$\mu\Big(\bigcap_{N\geq j}\bigcup_{k\geq N} E_k\Big) \leq \mu\Big(\bigcup_{k\geq N} E_k\Big) \leq \frac{1}{2^{N-1}} \qquad \text{per ogni } N \geq j\,,$$

cioè, facendo tendere $N \to +\infty$,

$$\mu\Big(\bigcap_{N\geq j}\bigcup_{k\geq N} E_k\Big) = 0 \quad \text{per ogni } j \text{ fissato,}$$

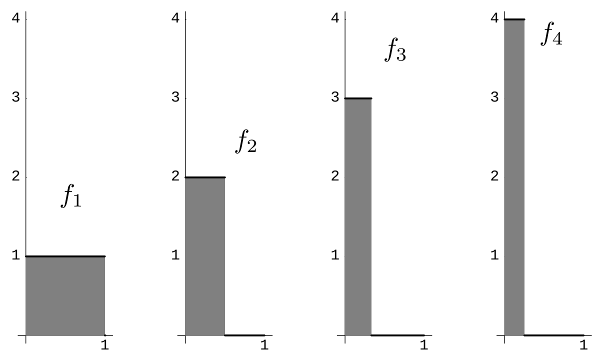
da cui

$$\mu(N) \leq \mu\Big(\bigcup_{j\in\mathbb{N}}\bigcap_{N\geq j}\bigcup_{k\geq N} E_k\Big) \leq \sum_{j\in\mathbb{N}} \mu\Big(\bigcap_{N\geq j}\bigcup_{k\geq N} E_k\Big) = 0\,,$$

come volevasi dimostrare.

d. Supponiamo che $f_n \to f$ in misura e sia f_{n_k} una sottosuccessione. Dalla definizione di convergenza in misura segue subito che anche f_{n_k} tende a f in misura. Per il punto precedente esiste una sua sottosuccessione $f_{n_{k_j}}$ che tende a f μ-quasi ovunque.

e. Siano $f_n, f \in L^1(\mu)$ e $f_n \to f$ nella norma di $L^1(\mu)$. Allora ogni sottosuccessione f_{n_k} tende pure a f in $L^1(\mu)$. Inoltre sappiamo che da ogni successione convergente in $L^1(\mu)$ possiamo estrarre una sottosuccessione convergente μ-quasi ovunque. Dunque da f_{n_k} possiamo estrarre $f_{n_{k_j}}$ che tende a f μ-quasi ovunque. Per il punto **b** possiamo concludere che $f_n \to f$ in misura.
Viceversa, siano $f_n, f \in L^1(\mu)$ tali che $f_n \to f$ in misura. Non è detto che convergano nella norma di $L^1(\mu)$. L'idea è di trovare una successione di funzioni che tende a 0 puntualmente ma il cui integrale non tende a 0.



Prendiamo per esempio $X = [0, 1]$ con la misura di Lebesgue e $f_n := n\chi_{]1,1/n]}$. Allora f_n tende puntualmente alla funzione nulla $f \equiv 0$ su tutto X ($f_n(x) = 0$ per $n > 1/x$, quindi definitivamente), però

$$\begin{aligned}\|f_n - f\|_{L^1(\mu)} &= \int_X |f_n - f|\,d\mu = \\ &= \int_{[0,1]} \big|n\chi_{]0,1/n]}(x) - 0\big|\,dx = \\ &= \int_0^{1/n} n\,dx \equiv 1 \not\to 0\,.\end{aligned}$$