Università degli Studi di Udine | Anno Accademico 1996/97

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Istituzioni di Analisi Superiore, primo modulo

Prova Scritta del 24 settembre 1997

Cognome e Nome:

Matricola: Documento di identità (se chiesto):

Chi porta quest'unico modulo ha 90 minuti di tempo e deve ritenersi a punteggio pieno con 15 punti. Chi porta due moduli ha tempo tre ore complessive e ha punteggio pieno con 30 punti, anche se presi tutti da uno solo dei due compiti.

1. Sia $Q_r(x,y)$ la palla (quadrata) aperta in $\mathbb{R}^2$ di centro $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ e raggio $r > 0$, rispetto alla norma $\|(x,y)\|_\infty := \max\{|x|,|y|\}$. Nel seguito $u\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è sempre una funzione integrabile secondo Lebesgue su tutti tali quadrati. Definiamo $(M_r u)(x,y)$ come la media integrale di u su $Q_r(x,y)$. Diremo che u ha la *proprietà delle medie sui quadrati* qualora $u(x,y) = (M_r u)(x,y)$ per ogni $r > 0$ e ogni $x, y \in \mathbb{R}$.

a. Dimostrare che $(x,y) \mapsto (M_r u)(x,y)$ è sempre una funzione continua. (Sia (x_n, y_n) una successione di punti che tende a $(\bar{x}, \bar{y})$ e poniamo $B_n := Q_r(x_n, y_n)$; verificare che per (x,y) fissato la successione $n \mapsto \chi_{B_n}(x,y)$ è definitivamente costante eccetto al più quando (x,y) è sul bordo del quadrato limite; convergenza dominata).

b. Se $u(x,y)$ è continua rispetto a x per ogni y fissato, ed è limitata sui compatti del piano, allora esiste $\partial(M_r u)(x,y)/\partial x = (1/4r^2)\int_{y-r}^{y+r}(u(x+r,t) - u(x-r,t))dt$. (Convergenza dominata e teorema fondamentale del calcolo).

c. Se u è continua allora $(x,y) \mapsto (M_r u)(x,y)$ è di classe C^1 ed esistono le derivate parziali seconde miste $\partial^2 u/\partial x \partial y$, che sono continue.

d. Se u è di classe C^n allora $(x,y) \mapsto (M_r u)(x,y)$ è di classe C^{n+1}

e. Se u ha la proprietà delle medie sui quadrati, allora è di classe C^∞.

f. Se u ha la proprietà delle medie sui quadrati, allora soddisfa le equazioni differenziali

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} = 0\,, \quad \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial^2 y} = 0\,.$$

(Moltiplicare per $4r^2$ l'equazione $u = M_r u$, derivare quattro e sei volte rispetto a r, mandare $r \to 0$ e combinare i risultati).

g. Le funzioni con la proprietà delle medie sui quadrati sono tutte e sole le combinazioni lineari dei seguenti 8 polinomi: 1, x, y, xy, $x^2 - y^2$, $y^3 - 3x^2 y$, $x^3 - 3xy^2$, $x^3 y - xy^3$. (Integrando la seconda equazione di **f** due volte rispetto a x e a y si ottiene $u(x,u) = a(x)y + b(x) + c(y)x + d(y)$; sostituendo nella prima si ha che a, b, c, d sono certi polinomi di terzo grado; verificare con la definizione che vale la proprietà delle medie sui quadrati).

Punti: 5+4+3+3+2+30+15

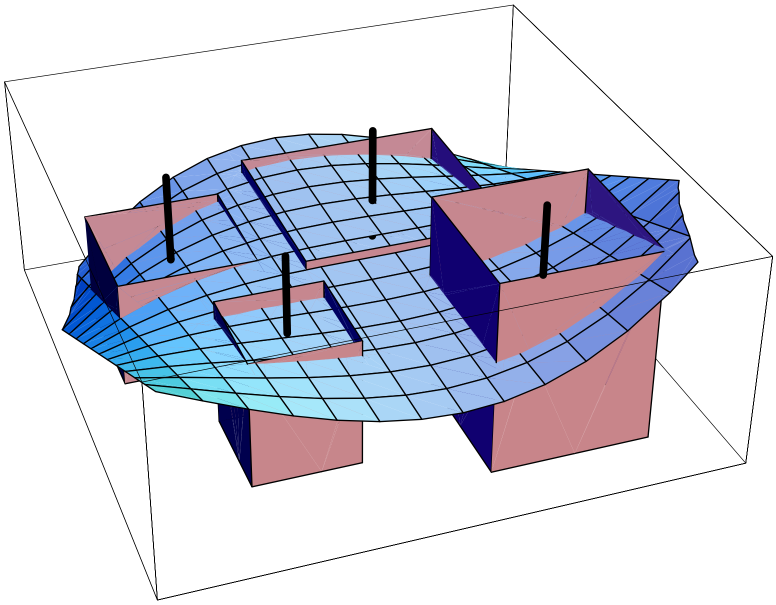
Università degli Studi di Udine | Anno Accademico 1996/97

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Istituzioni di Analisi Superiore, primo modulo

Prova Scritta del 24 settembre 1997

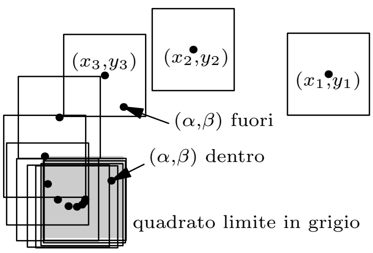
Svolgimento



1. Come possiamo figurarci la media integrale su un quadrato? Prendiamo una superficie cartesiana, immaginiamola come la superficie di un'onda nel mare "congelata" in un'istantanea fotografica, e facciamone un carotaggio con una sonda a sezione quadrata. Torniamo a far scorrere il tempo e lasciamo che la superficie dell'acqua si pareggi. Il livello raggiunto dentro la carota dopo la decantazione è la media integrale della funzione sull'area di base. Una funzione avrà la proprietà della media sui quadrati quando l'acqua si stabilizza sempre esattamente al livello che aveva nel centro della carota prima di essere scongelata. La figura qui accanto ritrae una funzione che *ha* la proprietà della media sui quadrati. Ma questa vedremo che la proprietà abbastanza speciale. Prendete per esempio la funzione $(x,y) \mapsto x^2$, integratela su un qualsiasi quadrato che non abbia centro sull'asse y, e verificherete che la media integrale non coincide con il valore nel centro.

a. Per dimostrare che la funzione $(x,y) \mapsto (M_r u)(x,y)$ è continua nelle nostre ipotesi, useremo il teorema della convergenza dominata. Si ha (indicando con μ la misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^2$)

$$(M_r u)(x,y) = \frac{1}{\mu(Q_r(x,y))} \int_{Q_r(x,y)} u \, d\mu = \frac{1}{4r^2} \int_{\mathbb{R}^2} u(\alpha,\beta) \chi_{Q_r(x,y)}(\alpha,\beta) \, d\mu(\alpha,\beta) .$$



Prendiamo una successione di punti $(x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$ che converge a un qualche $(\bar{x}, \bar{y})$ e cerchiamo di vedere per quali $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ si ha che

$$u(\alpha,\beta)\chi_{Q_r(x_n,y_n)}(\alpha,\beta) \longrightarrow u(\alpha,\beta)\chi_{Q_r(\bar{x},\bar{y})}(\alpha,\beta) \quad \text{per } n \to +\infty ,$$

o, che è praticamente lo stesso, visto che $u(\alpha,\beta)$ non dipende da n,

$$\chi_{Q_r(x_n,y_n)}(\alpha,\beta) \longrightarrow \chi_{Q_r(\bar{x},\bar{y})}(\alpha,\beta) \quad \text{per } n \to +\infty .$$

Prendiamo un (α,β) *interno* al quadrato limite, cioè

$$\|(\alpha,\beta) - (\bar{x},\bar{y})\|_\infty < r .$$

Per il teorema della permanenza del segno

$$\|(\alpha,\beta) - (x_n,y_n)\|_\infty < r \quad \text{per } n \text{ abbastanza grande,}$$

cioè $(\alpha,\beta) \in Q_r(\bar{x},\bar{y})$ definitivamente, per cui

$$\chi_{Q_r(x_n,y_n)}(\alpha,\beta) = 1 = \chi_{Q_r(\bar{x},\bar{y})}(\alpha,\beta) \quad \text{definitivamente, se } \big\|(\alpha,\beta)-(\bar{x},\bar{y})\big\|_\infty < r\,.$$

Prendiamo invece (α,β) *esterno* al quadrato limite, cioè $\|(\alpha,\beta)-(\bar{x},\bar{y})\|_\infty > r$. Analogamente a prima la disuguaglianza stretta rimane vera definitivamente:

$$\|(\alpha,\beta)-(x_n,y_n)\|_\infty > r \quad \text{per } n \text{ abbastanza grande,}$$

cioè $(\alpha,\beta) \notin Q_r(\bar{x},\bar{y})$ definitivamente, per cui

$$\chi_{Q_r(x_n,y_n)}(\alpha,\beta) = 0 = \chi_{Q_r(\bar{x},\bar{y})}(\alpha,\beta) \quad \text{definitivamente, se } \big\|(\alpha,\beta)-(\bar{x},\bar{y})\big\|_\infty > r\,.$$

Se (α,β) è esattamente sul bordo del quadrato limite non si può dire nulla a priori sulla convergenza di $\chi_{Q_r(x_n,y_n)}(\alpha,\beta)$, come si può vedere prendendo $r := 1$, $(x_n,y_n) := ((-1)^n/n, 0)$. Si dà il caso però che il bordo di un quadrato in $\mathbb{R}^2$ ha misura di Lebesgue bidimensionale nulla. Quindi effettivamente

$$\chi_{Q_r(x_n,y_n)}(\alpha,\beta) \longrightarrow \chi_{Q_r(\bar{x},\bar{y})}(\alpha,\beta) \quad \text{per } n \to +\infty \quad \text{per } \mu\text{-quasi ogni } (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2\,.$$

Per applicare il teorema della convergenza dominata non ci resta che verificare che la convergenza puntuale è dominata. La successione dei centri (x_n,y_n) converge, quindi è limitata, cioè contenuta in un qualche quadratone $Q_R(0,0)$ con $R > 0$ opportuno. I quadrati $Q_r(x_n,y_n)$ sono contenuti nel quadratone $B := Q_{R+r}(0,0)$. Allora

$$\big|u(\alpha,\beta)\chi_{Q_r(x_n,y_n)}(\alpha,\beta)\big| \le \big|u(x,y)\big|\chi_B(x,y)\,,$$

e la funzione $u\chi_B$ non dipende da n ed è in $L^1(\mathbb{R}^2)$ perché per ipotesi u è integrabile secondo Lebesgue su tutti i quadrati. Insomma, abbiamo dimostrato che

$$\text{se } (x_n,y_n) \to (\bar{x},\bar{y}) \qquad \text{allora} \qquad (M_r u)(x_n,y_n) \to (M_r u)(\bar{x},\bar{y})\,,$$

che è la continuità di $(x,y) \mapsto (M_r u)(x,y)$.
Si può generalizzare il ragionamento nel seguente enunciato: *Sia D un insieme misurabile limitato di $\mathbb{R}^n$ avente frontiera di misura nulla, e sia $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione misurabile che sui boreliani limitati sia anche integrabile. Allora la funzione*

$$x \mapsto \int_{x+D} f\,d\mu$$

è continua da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}$. (Indichiamo con $x+D$ il traslato di D secondo il vettore x).

b. Scriviamo $(M_r u)(x,y)$ come integrale iterato col teorema di Fubini:

$$(M_r u)(x,y) = \frac{1}{4r^2}\int_{Q_r(x,y)} u\,d\mu = \frac{1}{4r^2}\int_{y-r}^{y+r} d\beta \int_{x-r}^{x+r} u(\alpha,\beta)\,d\alpha\,.$$

Ponendo

$$f(x,\beta) := \int_{x-r}^{x+r} u(\alpha,\beta)\,d\alpha\,,$$

si ha

$$(M_r u)(x,y) = \frac{1}{4r^2}\int_{y-r}^{y+r} f(x,\beta)\,d\beta\,.$$

Per β fissato la funzione $\alpha \mapsto u(\alpha,\beta)$ è continua per ipotesi. Grazie al teorema fondamentale del calcolo possiamo dire che $x \mapsto f(x,\beta)$ è derivabile per ogni β fissato e che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,\beta) = u(x+r,\beta) - u(x-r,\beta)\,.$$

Poiché a noi interessa la derivabilità puntuale, possiamo restringere i valori di $(x,y),(\alpha,\beta)$ a un qualche insieme limitato, su cui u è limitata per ipotesi, per cui

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,\beta)\right| \le \text{costante.}$$

Grazie ai risultati generali sulla derivazione di un integrale rispetto a un parametro (facili conseguenze della convergenza dominata), possiamo concludere che la funzione $x \mapsto (M_r u)(x,y)$ è derivabile per ogni y e che si ha

$$\frac{\partial M_r u}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{4r^2}\int_{y-r}^{y+r} \frac{\partial f}{\partial x}(x,\beta)\,d\beta = \frac{1}{4r^2}\int_{y-r}^{y+r} \Big(u(x+r,\beta) - u(x-r,\beta)\Big)d\beta\,.$$

c. Se u è continua, allora l'integrando $h(\beta)$ nella formula

$$\frac{\partial M_r u}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{4r^2}\int_{y-r}^{y+r} \underbrace{\Big(u(x+r,\beta) - u(x-r,\beta)\Big)}_{=:h(\beta)}\,d\beta$$

è una funzione continua di β e non dipende da y, e quindi per il teorema fondamentale del calcolo l'integrale è derivabile rispetto a y e si ha

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial M_r u}{\partial x}(x,y) &= \frac{h(y+r)-h(y-r)}{4r^2} = \\ &= \frac{\big(u(x+r,y+r)-u(x-r,y+r)\big)-\big(u(x+r,y-r)-u(x-r,y-r)\big)}{4r^2} = \\ &= \frac{u(x+r,y+r)-u(x-r,y+r)-u(x+r,y-r)-u(x-r,y-r)}{4r^2}\,.\end{aligned}$$

Questa derivata parziale mista risulta esistere ed essere continua. Un risultato generale dice che se una delle due derivate miste esiste continua, allora anche l'altra derivata mista esiste e coincide con la prima. Se anche non conosciamo quel teorema possiamo lo stesso arrivare a dire che

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial M_r u}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial M_r u}{\partial x}(x,y) = \frac{u(x+r,y+r)-u(x-r,y+r)-u(x+r,y-r)-u(x-r,y-r)}{4r^2}\,.$$

Basta infatti partire dal teorema di Fubini con l'ordine di integrazione invertito

$$(M_r u)(x,y) = \frac{1}{4r^2}\int_{x-r}^{x+r} d\alpha \int_{y-r}^{y+r} u(\alpha,\beta)\,d\beta\,,$$

per cui

$$\frac{\partial M_r u}{\partial y} = \frac{1}{4r^2}\int_{x-r}^{x+r}\Big(u(\alpha,y+r)-u(\alpha,y-r)\Big)d\alpha\,,$$

e poi

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial M_r u}{\partial y} &= \frac{\big(u(x+r,y+r)-u(x+r,y-r)\big)-\big(u(x-r,y+r)-u(x-r,y-r)\big)}{4r^2} = \\ &= \frac{u(x+r,y+r)-u(x-r,y+r)-u(x+r,y-r)-u(x-r,y-r)}{4r^2} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial M_r u}{\partial x}(x,y)\,.\end{aligned}$$

Per dimostrare che $(x,y)\mapsto (M_r u)(x,y)$ è di classe C^1 bisogna far vedere che i due integrali

$$\begin{aligned}\frac{\partial M_r u}{\partial x}(x,y) &= \frac{1}{4r^2}\int_{y-r}^{y+r}\Big(u(x+r,\beta)-u(x-r,\beta)\Big)d\beta = \\ &= \frac{1}{4r^2}\int_{\mathbb{R}} \chi_{[y-r,y+r]}(\beta)\Big(u(x+r,\beta)-u(x-r,\beta)\Big)d\beta\,,\\ \frac{\partial M_r u}{\partial y} &= \frac{1}{4r^2}\int_{x-r}^{x+r}\Big(u(\alpha,y+r)-u(\alpha,y-r)\Big)d\alpha = \\ &= \frac{1}{4r^2}\int_{\mathbb{R}} \chi_{[x-r,x+r]}(\alpha)\Big(u(\alpha,y+r)-u(\alpha,y-r)\Big)d\alpha\end{aligned}$$

sono funzioni continue di (x,y). Questo si può fare ripetendo i ragionamenti del punto **a**, questa volta in una dimensione.

d. Applicando ripetutamente i teoremi di derivazione sotto il segno di integrale alle formule delle derivate prime otteniamo che se $u \in C^n(\mathbb{R}^2)$ allora esistono le derivate parziali non miste di ordine k per $1 \le k \le n+1$, sono espresse dalle formule seguenti:

$$\frac{\partial^k M_r u}{\partial x^k}(x,y) = \frac{1}{4r^2}\int_{y-r}^{y+r}\Big(\frac{\partial^{k-1}u}{\partial x^{k-1}}(x+r,\beta) - \frac{\partial^{k-1}u}{\partial x^{k-1}}(x-r,\beta)\Big)d\beta\,,$$
$$\frac{\partial^k M_r u}{\partial y^k}(x,y) = \frac{1}{4r^2}\int_{x-r}^{x+r}\Big(\frac{\partial^{k-1}u}{\partial y^{k-1}}(\alpha,y+r) - \frac{\partial^{k-1}u}{\partial y^{k-1}}(\alpha,y-r)\Big)d\alpha\,,$$

e sono funzioni continue di (x,y). Le derivate miste di ordine k non sono più integrali, ma semplici somme algebriche di derivate parziali di u di ordine $k-2$, per cui sono continue per $k \le n+2$.

e. Se u ha la proprietà della media sui quadrati allora è continua, perché $M_r u$ lo è. Ma se u è continua allora $M_r u = u$ è di classe $C^1(\mathbb{R}^2)$. Per induzione si vede che u deve essere di classe C^n per ogni n.

f. Moltiplicando l'equazione $u = M_r u$ per $4r^2$ si ha

$$4r^2 u(x,y) = \int_{y-r}^{y+r} d\beta \int_{x-r}^{x+r} u(\alpha,\beta)\,d\alpha\,.$$

Essendo u di classe C^∞ e le integrazioni su intervalli limitati, il secondo membro è pacificamente derivabile rispetto a r col teorema fondamentale del calcolo e la derivazione sotto il segno di integrale. Derivando otteniamo:

$$8ru(x,y) = \int_{x-r}^{x+r} u(\alpha,y+r)\,d\alpha - (-1)\int_{x-r}^{x+r} u(\alpha,y-r)\,d\alpha + \int_{y-r}^{y+r} d\beta\Big(u(x+r,\beta) - (-1)u(x-r,\beta)\Big)$$

Derivando un'altra volta rispetto a r:

$$\begin{aligned}
8u(x,y) &= u(x+r,y+r) - (-1)u(x-r,y+r) + \int_{x-r}^{x+r}\frac{\partial u}{\partial y}(\alpha,y+r)\,d\alpha + \\
&\quad + u(x+r,y-r) - (-1)u(x-r,y-r) + (-1)\int_{x-r}^{x+r}\frac{\partial u}{\partial y}(\alpha,y-r)\,d\alpha + \\
&\quad \Big(u(x+r,y+r) - (-1)u(x-r,y+r)\Big) - (-1)\Big(u(x+r,y-r) - (-1)u(x-r,y-r)\Big) + \\
&\quad + \int_{y-r}^{y+r} d\beta\Big(\frac{\partial u}{\partial x}(x+r,\beta) + (-1)\frac{\partial u}{\partial x}(x-r,\beta)\Big) = \\
&= 2u(x+r,y+r) + 2u(x-r,y+r) + 2u(x+r,y-r) + 2u(x-r,y-r) + \\
&\quad + \int_{x-r}^{x+r}\Big(\frac{\partial u}{\partial y}(\alpha,y+r) - \frac{\partial u}{\partial y}(\alpha,y-r)\Big)\,d\alpha + \\
&\quad + \int_{y-r}^{y+r} d\beta\Big(\frac{\partial u}{\partial x}(x+r,\beta) - \frac{\partial u}{\partial x}(x-r,\beta)\Big)\,.
\end{aligned}$$

Deriviamo una terza volta:

$$\begin{aligned}
0 &= 2u_x(x+r,y+r) + 2u_y(x+r,y+r) - 2u_x(x-r,y+r) + 2u_y(x-r,y+r) + \\
&\quad + 2u_x(x+r,y-r) - 2u_y(x+r,y-r) - 2u_x(x-r,y-r) - 2u_y(x-r,y-r) + \\
&\quad + \big(u_y(x+r,y+r) - u_y(x+r,y-r)\big) - (-1)\cdot\big(u_y(x-r,y+r) - u_y(x-r,y-r)\big) + \\
&\quad + \int_{x-r}^{x+r}\big(u_{yy}(\alpha,y+r) + u_{yy}(\alpha,y-r)\big)\,d\alpha + \\
&\quad + \big(u_x(x+r,y+r) - u_x(x-r,y+r)\big) - (-1)\cdot\big(u_x(x+r,y-r) - u_x(x-r,y-r)\big) + \\
&\quad + \int_{y-r}^{y+r}\big(u_{xx}(x+r,\beta) - (-1)u_{xx}(x-r,\beta)\big)\,d\beta =
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{x-r}^{x+r} \big(u_{yy}(a, y-r) + u_{yy}(a, y+r)\big)\big)\, d\alpha + \int_{y-r}^{y+r} \big(u_{xx}(x-r, b) + u_{xx}(x+r, b)\big)\, d\beta - \\
&\quad - 3u_y(x-r, y-r) + 3u_y(x-r, y+r) - 3u_y(x+r, y-r) + 3u_y(x+r, y+r) - \\
&\quad - 3u_x(x-r, y-r) - 3u_x(x-r, y+r) + 3u_x(x+r, y-r) + 3u_x(x+r, y+r)
\end{aligned}
$$

Deriviamo una quarta volta (saltando le semplificazioni intermedie):

$$
\begin{aligned}
0 = &\int_{x-r}^{x+r} \big(-u_{yyy}(a, y-r) + u_{yyy}(a, y+r)\big)\, d\alpha + \int_{y-r}^{y+r} \big(-u_{xxx}(x-r, b) + u_{xxx}(x+r, b)\big)\, d\beta + \\
&+ 4u_{yy}(x-r, y-r) + 4u_{yy}(x-r, y+r) + 4u_{yy}(x+r, y-r) + \\
&+ 4u_{yy}(x+r, y+r) + 6u_{xy}(x-r, y-r) - 6u_{xy}(x-r, y+r) - \\
&- 6u_{xy}(x+r, y-r) + 6u_{xy}(x+r, y+r) + 4u_{xx}(x-r, y-r) + \\
&+ 4u_{xx}(x-r, y+r) + 4u_{xx}(x+r, y-r) + 4u_{xx}(x+r, y+r)
\end{aligned}
$$

Derivata quinta:

$$
\begin{aligned}
0 = &\int_{x-r}^{x+r} \big(u_{yyyy}(a, y-r) + u_{yyyy}(a, y+r)\big)\, d\alpha + \int_{y-r}^{y+r} \big(u_{xxxx}(x-r, b) + u_{xxxx}(x+r, b)\big)\, d\beta - \\
&- 5u_{yyy}(x-r, y-r) + 5u_{yyy}(x-r, y+r) - 5u_{yyy}(x+r, y-r) + 5u_{yyy}(x+r, y+r) - \\
&- 10u_{xyy}(x-r, y-r) - 10u_{xyy}(x-r, y+r) + 10u_{xyy}(x+r, y-r) + 10u_{xyy}(x+r, y+r) - \\
&- 10u_{xxy}(x-r, y-r) + 10u_{xxy}(x-r, y+r) - 10u_{xxy}(x+r, y-r) + 10u_{xxy}(x+r, y+r) - \\
&- 5u_{xxx}(x-r, y-r) - 5u_{xxx}(x-r, y+r) + 5u_{xxx}(x+r, y-r) + 5u_{xxx}(x+r, y+r)
\end{aligned}
$$

E infine la derivata sesta:

$$
\begin{aligned}
0 = &\int_{x-r}^{x+r} \big(-u_{yyyyy}(a, y-r) + u_{yyyyy}(a, y+r)\big)\, d\alpha + \\
&+ \int_{y-r}^{y+r} \big(-u_{xxxxx}(x-r, b) + u_{xxxxx}(x+r, b)\big)\, d\beta + \\
&+ 6u_{yyyy}(x-r, y-r) + 6u_{yyyy}(x-r, y+r) + 6u_{yyyy}(x+r, y-r) + \\
&+ 6u_{yyyy}(x+r, y+r) + 15u_{xyyy}(x-r, y-r) - 15u_{xyyy}(x-r, y+r) - \\
&- 15u_{xyyy}(x+r, y-r) + 15u_{xyyy}(x+r, y+r) + 20u_{xxyy}(x-r, y-r) + \\
&+ 20u_{xxyy}(x-r, y+r) + 20u_{xxyy}(x+r, y-r) + 20u_{xxyy}(x+r, y+r) + \\
&+ 15u_{xxxy}(x-r, y-r) - 15u_{xxxy}(x-r, y+r) - 15u_{xxxy}(x+r, y-r) + \\
&+ 15u_{xxxy}(x+r, y+r) + 6u_{xxxx}(x-r, y-r) + 6u_{xxxx}(x-r, y+r) + \\
&+ 6u_{xxxx}(x+r, y-r) + 6u_{xxxx}(x+r, y+r)
\end{aligned}
$$

Mandando $r \to 0$ nella derivata quarta si ricava $0 = 16u_{xx}(x, y) + 16u_{yy}(x, y)$, cioè che u è una funzione armonica:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0\,.$$

Mandando $r \to 0$ nella derivata sesta si ricava $0 = 24u_{yyyy}(x, y) + 80u_{xxyy}(x, y) + 24u_{xxxx}(x, y)$, cioè

$$3\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 10\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + 3\frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0\,.$$

Derivando due volte la $0 = u_{xx} + u_{yy}$ rispetto a x e separatamente rispetto a y:

$$0 = u_{xxxx} + u_{xxyy} \qquad \text{e} \qquad 0 = u_{xxyy} + u_{xxyy}\,.$$

Sottraendo membro a membro si ha $0 = u_{xxxx} - u_{yyyy}$, che sostituita nella $3u_{xxxx} + 10u_{xxyy} + 3u_{yyyy} = 0$ fa ricavare che

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} = 0\,.$$

g. La condizione $u_{xxyy} = 0$ ha conseguenze fortissime e facilissime su u. Infatti scrivendola come

$$\frac{\partial u_{xyy}}{\partial x} = 0$$

si deduce che $x \mapsto u_{xyy}(x, y)$ è una costante $a(y)$ per ogni y fissato. Visto che u è di classe C^∞, anche $a(y) = u_{xyy}(0, y)$ è di classe C^∞. Abbiamo allora

$$u_{xyy} = \frac{\partial u_{yy}}{\partial x} = a(y)\,.$$

La funzione $x \mapsto u_{yy}(x, y)$ ha derivata costante $a(y)$ per ogni y fissato. Dunque è una funzione lineare di x:

$$u_{yy}(x, y) = a(y)x + b(y)\,.$$

Di nuovo la $b(y) = u_{yy}(0, y)$ è di classe C^∞. Siano $A, B \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ due funzioni C^∞ tali che $A'' = a$, $B'' = b$. Integrando una volta rispetto a y la $u_{yy} = A''(y)x + B''(y)$ si ricava

$$u_y(x, y) = A'(y)x + B'(y) + C(x)\,,$$

dove ancora C è di classe C^∞. Integrando un'ultima volta rispetto a y:

$$u(x, y) = A(y)x + B(y) + C(x)y + D(x)$$

(D è di classe C^∞). Questa è la soluzione generale dell'equazione $u_{xxyy} = 0$. Calcoliamo u_{xx}, u_{yy}:

$$\begin{aligned} u_x(x, y) &= A(y) + C'(x)y + D'(x)\,, \qquad & u_{xx}(x, y) &= C''(x)y + D''(x)\,, \\ u_y(x, y) &= A'(y)x + B'(y) + C(x)\,, \qquad & u_{yy}(x, y) &= A''(y)x + B''(y)\,. \end{aligned}$$

Sostituiamo nell'equazione di Laplace $u_{xx} + u_{yy} = 0$:

$$0 = u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = C''(x)y + D''(x) + A''(y)x + B''(y)\,.$$

Ponendo $y = 0$ abbiamo

$$D''(x) + A''(0)x + B''(0) = 0\,.$$

ricaviamo

$$D''(x) = -A''(0)x - B''(0)\,,$$

che implica che $D(x)$ è un polinomio di grado al massimo 3:

$$D(x) = -\frac{A''(0)}{6}x^3 - \frac{B''(0)}{2}x^2 + D'(0)x + D(0)\,.$$

Sostituiamo nell'equazione di Laplace:

$$0 = u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = C''(x)y - A''(0)x - B''(0) + A''(y)x + B''(y)\,.$$

Ponendo $x = 0$ si ricava che $0 = C''(0)y - B''(0) + B''(y)$. Ponendo di nuovo $y = 0$ si ha che

$$B''(y) = -C''(0)y + B''(0)\,,$$

che implica che $B(y)$ è un polinomio di grado al massimo 3:

$$B(y) = -\frac{C''(0)}{6}y^3 + \frac{B''(0)}{2}y^2 + B'(0)y + B(0)\,.$$

L'equazione di Laplace si semplifica ulteriormente in

$$0 = C''(x)y - A''(0)x - B''(0) + A''(y)x - C''(0)y + B''(0) = C''(x)y - A''(0)x + A''(y)x - C''(0)y\,.$$

Riscrivendo la relazione così, quando $x, y \neq 0$,

$$\frac{C''(x) - C''(0)}{x} = -\frac{A''(y) - A''(0)}{y}\,,$$

si vede che il primo membro non dipende da y, mentre il secondo non dipende da x. Pertanto i due membri non dipendono né da x né da y. Facendo tendere $x, y \to 0$ si ricava la costante in termini della derivata terza di C, A:

$$\frac{C''(x) - C''(0)}{x} = C'''(0) = -A'''(0) = -\frac{A''(y) - A''(0)}{y}\,.$$

In particolare A e C devono essere polinomi di grado non superiore a 3, in quanto

$$C''(x) = C'''(0)x + C''(0)\,, \qquad A''(y) = A'''(0)y + A''(0) = -C'''(0)y + A''(0)\,.$$

Più esplicitamente

$$\begin{aligned} C(x) &= \frac{C'''(0)}{6}x^3 + \frac{C''(0)}{2}x^2 + C'(0)x + C(0)\,,\\ A(y) &= -\frac{C'''(0)}{6}y^3 + \frac{A''(0)}{2}y^2 + A'(0)y + A(0)\,. \end{aligned}$$

Sostituiamo le espressioni trovate nella formula $u(x, y) = A(y)x + B(y) + C(x)y + D(x)$:

$$\begin{aligned} u(x,y) = &\Big(-\frac{C'''(0)}{6}y^3 + \frac{A''(0)}{2}y^2 + A'(0)y + A(0)\Big)x + \Big(-\frac{C''(0)}{6}y^3 + \frac{B''(0)}{2}y^2 + B'(0)y + B(0)\Big) +\\ &+ \Big(\frac{C'''(0)}{6}x^3 + \frac{C''(0)}{2}x^2 + C'(0)x + C(0)\Big)y + \Big(-\frac{A''(0)}{6}x^3 - \frac{B''(0)}{2}x^2 + D'(0)x + D(0)\Big) =\\ = &\frac{C'''(0)}{6}(x^3y - xy^3) - \frac{A''(0)}{6}(x^3 - 3xy^2) + \big(A'(0) + C'(0)\big)xy + \big(A(0) + C'(0)\big)x -\\ &- \frac{C''(0)}{6}(3x^2y - y^3) - \frac{B''(0)}{2}(x^2 - y^2) + \big(B'(0) + C(0)\big)y + \big(B(0) + D(0)\big)\,. \end{aligned}$$

Abbiamo trovato che $u(x, y)$ è necessariamente una combinazione lineare degli 8 polinomi

$$\begin{gathered} u_1(x,y) := 1\,, \quad u_2(x,y) := x\,, \quad u_3(x,y) := y\,, \quad u_4(x,y) := xy\,, \quad u_5(x,y) := x^2 - y^2\,,\\ u_6(x,y) := y^3 - 3x^2y\,, \quad u_7(x,y) := x^3 - 3xy^2\,, \quad u_8(x,y) := x^3y - xy^3\,. \end{gathered}$$

Che la condizione sia anche sufficiente? Calcoliamoci preliminarmente l'integrale del monomio $x^n y^m$ sul quadrato $Q_r(x_0, y_0)$:

$$\begin{aligned} \int_{Q_r(x_0,y_0)} x^n y^m\,dx\,dy &= \int_{y_0-r}^{y_0+r} dy \int_{x_0-r}^{x_0+r} x^n y^m\,dx = \left(\int_{y_0-r}^{y_0+r} y^m\,dy\right)\cdot\left(\int_{x_0-r}^{x_0+r} x^n\,dx\right) =\\ &= \frac{(y_0+r)^{m+1} - (y_0-r)^{m+1}}{m+1}\cdot\frac{(x_0+r)^{n+1} - (x_0-r)^{n+1}}{n+1}\,. \end{aligned}$$

A meno di scambio di coordinate, i monomi che ci interessano sono 1, x, x^2, x^3, xy, x^2y, x^3y:

$$\int_{Q_r(x_0,y_0)} 1\,dx\,dy = \frac{(y_0+r)^{0+1}-(y_0-r)^{0+1}}{0+1}\cdot\frac{(x_0+r)^{0+1}-(x_0-r)^{0+1}}{0+1} = 2r\cdot 2r = 4r^2\,,$$

$$\int_{Q_r(x_0,y_0)} x\,dx\,dy = \frac{(y_0+r)^{0+1}-(y_0-r)^{0+1}}{0+1}\cdot\frac{(x_0+r)^{1+1}-(x_0-r)^{1+1}}{1+1} = 2r\cdot\frac{4x_0r}{2} = 4x_0r^2\,,$$

$$\begin{aligned}\int_{Q_r(x_0,y_0)} x^2\,dx\,dy &= \frac{(y_0+r)^{0+1}-(y_0-r)^{0+1}}{0+1}\cdot\frac{(x_0+r)^{2+1}-(x_0-r)^{2+1}}{2+1} = \\ &= 2r\cdot\frac{6x_0^2r+2r^3}{3} = \frac{12x_0^2r^2+4r^4}{3}\,,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{Q_r(x_0,y_0)} x^3\,dx\,dy &= \frac{(y_0+r)^{0+1}-(y_0-r)^{0+1}}{0+1}\cdot\frac{(x_0+r)^{3+1}-(x_0-r)^{3+1}}{3+1} = \\ &= 2r\cdot\frac{8x_0^3r+8x_0r^3}{4} = 4x_0^3r^2+4x_0r^4\,,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{Q_r(x_0,y_0)} xy\,dx\,dy &= \frac{(y_0+r)^{1+1}-(y_0-r)^{1+1}}{1+1}\cdot\frac{(x_0+r)^{1+1}-(x_0-r)^{1+1}}{1+1} = \\ &= \frac{4y_0r}{2}\cdot\frac{4x_0r}{2} = 4x_0y_0r^2\,,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{Q_r(x_0,y_0)} x^2y\,dx\,dy &= \frac{(y_0+r)^{1+1}-(y_0-r)^{1+1}}{1+1}\cdot\frac{(x_0+r)^{2+1}-(x_0-r)^{2+1}}{2+1} = \\ &= \frac{4y_0r}{2}\cdot\frac{6x_0^2r+2r^3}{3} = \frac{12x_0^2y_0r^2+4y_0r^4}{3}\,,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{Q_r(x_0,y_0)} x^3y\,dx\,dy &= \frac{(y_0+r)^{1+1}-(y_0-r)^{1+1}}{1+1}\cdot\frac{(x_0+r)^{3+1}-(x_0-r)^{3+1}}{3+1} = \\ &= \frac{4y_0r}{2}\cdot\frac{8x_0^3r+8x_0r^3}{4} = 4x_0^3y_0r^2+4x_0y_0r^4\,.\end{aligned}$$

Dunque

$$M_ru_1(x_0,y_0) = \frac{1}{4r^2}\cdot 4r^2 = 1 = u_1(x_0,y_0)\,,$$

$$M_ru_2(x_0,y_0) = \frac{1}{4r^2}\cdot 4x_0r^2 = x_0 = u_2(x_0,y_0)\,,$$

$$M_ru_3(x_0,y_0) = (\text{il precedente scambiando } x \text{ con } y) = y_0 = u_3(x_0,y_0)\,,$$

$$M_ru_4(x_0,y_0) = \frac{1}{4r^2}\cdot 4x_0y_0r^2 = x_0y_0 = u_4(x_0,y_0)\,,$$

$$M_ru_5(x_0,y_0) = \frac{1}{4r^2}\cdot\Big(\frac{12x_0^2r^2+4r^4}{3} - \frac{12y_0^2r^2+4r^4}{3}\Big) = x_0^2-y_0^2 = u_5(x_0,y_0)\,,$$

$$M_ru_6(x_0,y_0) = \frac{1}{4r^2}\cdot\Big((4y_0^3r^2+4y_0r^4) - 3\cdot\frac{12x_0^2y_0r^2+4y_0r^4}{3}\Big) = y_0^3-3x_0^2y_0 = u_6(x_0,y_0)\,,$$

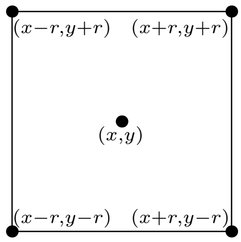
$$M_ru_7(x_0,y_0) = (\text{il precedente scambiando } x \text{ con } y) = x_0^3-3x_0y_0^2 = u_7(x_0,y_0)\,,$$

$$M_ru_8(x_0,y_0) = \frac{1}{4r^2}\cdot\Big(4x_0^3y_0r^2+4x_0y_0r^4 - \big(4y_0^3x_0r^2+4y_0x_0r^4\big)\Big) = x_0^3y_0-x_0y_0^3 = u_8(x_0,y_0)\,.$$

Tutte le funzioni $u_1,\dots,u_8$ hanno la proprietà della media sui quadrati. Per linearità la proprietà si trasmette a tutte le combinazioni lineari.

Approfondimento 1. Dimostrare che l'insieme delle funzioni u che hanno la proprietà della media sui quadrati è lo stesso dell'insieme delle funzioni di classe C^4 tali che

$$u(x,y) = \frac{u(x+r,y+r)+u(x+r,y-r)+u(x-r,y+r)+u(x-r,y-r)}{4}.$$



Notare che questa è semplicemente la condizione che il valore al centro del quadrato $Q_r(x,y)$ sia la media aritmetica dei valori ai quattro vertici.
(Suggerimento: derivare la condizione 2 e 4 volte rispetto a r e far tendere $r \to 0$).

Approfondimento 2. Per $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ e $r_1, r_2 > 0$ poniamo $R_{r_1,r_2}(x,y) := [x-r_1, x+r_1] \times [y-r_2, y+r_2]$. Diremo che u ha la proprietà della media sui rettangoli se il valore di u al centro di qualsiasi rettangolo $R_{r_1,r_2}(x,y)$ coincide con la media integrale su tutto il rettangolo. Trovare le funzioni con tale proprietà.

Approfondimento 3. Cosa succede se invece di quadrati si prendono triangoli equilateri, per esempio con un lato orizzontale e si prende come centro il baricentro? Oppure si lasciano i quadrati, ma invece del centro si usa un altro punto, per esempio a metà fra il centro e il punto medio del lato in basso?

Nota. I calcoli per il punto **f** e per parte del punto **g** sono stati eseguiti a macchina. Non penso che sarebbe ragionevole chiedere a chiunque di farli a mano, specialmente nel poco tempo concesso per un esame scritto. Chi volesse cimentarsi negli approfondimenti lo faccia appoggiandosi a un calcolatore con un opportuno programma di calcolo simbolico.