Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Analisi Matematica 5
Programma

Prof. Gianluca Gorni

Testi di riferimento: Giuseppe De Marco, *Analisi Due* (seconda edizione), Decibel-Zanichelli, capitoli 6 e 11. Materiale didattico attinente al corso è anche disponibile presso

`http://www.dimi.uniud.it/gorni/Istituzioni`

Nel seguito si indicano in *corsivo* i teoremi di cui è richiesta la dimostrazione all'orale, e di essi è riportato un elenco a parte alla fine.

Regolamento d'esame: L'esame consiste di uno scritto e un orale. Per lo scritto sono concesse tre ore. Gli scritti possono essere ripetuti senza limitazioni, ma ogni scritto consegnato annulla i precedenti. Chi ha superato lo scritto a un appello può dare l'orale in qualsiasi appello, o anche su appuntamento individuale.

1. Equazioni differenziali

Teorema di Esistenza locale di Peano. Generalità sulle equazioni differenziali ordinarie. Equazioni autonome, equazioni in forma normale. Distinzione concettuale fra le funzioni $t \mapsto f(t, y(t))$ e $(t, y) \mapsto f(t, y)$. Definizione di soluzione di un'equazione differenziale, con il significato della richiesta che il dominio sia un intervallo. Significato geometrico dell'equazione differenziale $y' = f(t, y)$ nel caso che y sia in dimensione 1 o 2. Caratterizzazione delle funzioni di una variabile lipschitziane e derivabili. Caratterizzazione delle funzioni lipschitziane derivabili, e di quelle lipschitziane di classe C^1 a tratti. Significato geometrico della lipschitzianità. Definizione di cilindro di sicurezza per un'equazione differenziale, con significato geometrico. Esistenza di cilindri di sicurezza nel caso di f continua. Le soluzioni di un problema di Cauchy non escono da un cilindro di sicurezza. Richiami sul teorema di esistenza e unicità di Cauchy-Lipschitz. Un esempio di equazione differenziale senza unicità locale: $y' = \sqrt{|y|}$. *Il teorema di esistenza di Peano.* Le poligonali di Eulero: loro definizione, verifica che sono definite e lipschitziane su tutto l'intervallo di base del cilindro di sicurezza, uso dell'uniforme continuità di f sul cilindro per dimostrare che le poligonali sono "soluzioni approssimate". Passaggio al limite nella successione delle poligonali di Eulero. *Il teorema di Ascoli-Arzelà.* Commenti sulla non completa costruttività del teorema di esistenza di Peano.

Soluzioni massimali, unicità e non unicità locale. L'insieme delle soluzioni di un'equazione differenziale è parzialmente ordinato dalla relazione di estensione (o di restrizione, o di inclusione per i grafici). Soluzioni massimali Esistenza di soluzioni massimali in ipotesi di continuità di f se si ammette l'assioma di scelta.

Esistenza e unicità della soluzione massimale per un punto in ipotesi di Cauchy-Lipschitz (cenno). Esempi: soluzioni massimali di $y' = \sqrt{|y|}$ e di $y' = y^2$. Incollamenti di soluzioni.

Esistenza in grande, fuga dai compatti, confronto. *Se una soluzione massimale passa per il centro di un cilindro di sicurezza, allora è definita su tutta la base.* Il dominio di una soluzione massimale è un intervallo aperto. Il caso in cui Ω è una striscia e il problema dell'esistenza "in grande". *Il teorema di esistenza in grande in ipotesi di crescenza sublineare.* Studio dell'equazione $y' = 1/(t^2 + y^2)$. *Il grafico di una soluzione massimale è un sottinsieme chiuso nella topologia relativa di* Ω. *Fuga dai compatti. Esistenza in grande per le soluzioni massimali dell'equazione autonoma* $y' = g(y)$ *che rimangono definitivamente in un compatto del dominio di* g. Esempio. Quando l'equazione è autonoma, il traslato temporale di una soluzione è ancora una soluzione. Un lemma sulle funzioni reali derivabili. *Teorema del confronto fra sottosoluzioni e soprasoluzioni: senza e con ipotesi di Cauchy-Lipschitz.* Il criterio dell'asintoto. Studio dell'equazione $y' = g(t, y)\operatorname{sen}^2 y$. Studio qualitativo dell'equazione $y' = e^{y^2} - e^{t^2}$. Studio dell'equazione $y'' = e^y y'$. Se $\lambda(y)$ è una funzione scalare mai nulla, allora le soluzioni dell'equazione autonoma $y' = \lambda(y)g(y)$ si ottengono da quelle di $y' = g(y)$ tramite un cambio di parametro diffeomorfo.

Integrali primi. Definizione di integrale primo, o costante del moto, per una equazione differenziale, e sua riformulazione come identità algebrica. Studio del sistema $\dot{x} = yz$, $\dot{y} = -xz$, $\dot{z} = -k^2xy$, usando i due integrali primi $x^2 + y^2$ e $kx^2 + z^2$. L'integrale primo dell'energia per l'equazione $\ddot{y} = -\nabla V(y)$. Studio qualitativo dell'equazione del pendolo non lineare. *Calcolo esplicito del periodo dell'oscillazione del pendolo. Il sistema predatore-preda di Lotka-Volterra.* Equazioni differenziali "totali" nel piano.

Equazioni non lineari risolubili analiticamente. Rassegna di metodi risolutivi espliciti per equazioni differenziali: equazioni a variabili separabili, equazioni omogenee e loro varianti, l'equazione scalare autonoma del secondo ordine $y'' = f(y, y')$, l'equazione di Bernoulli. Esempi di risoluzione esplicita di equazioni differenziali: $(x + y + 1)dx + (2x + 2y - 1)dy = 0$, $u(t)u'(t) = u(t)^2 - t$, $y''(t) = y'(t)^2 - y(t)$.

2. La misura di Lebesgue

La misura esterna di Lebesgue. Difetti della teoria della misura secondo Peano-Jordan. Plurintervalli (rettangoli, scatole) N-dimensionali e loro volume (lunghezza, area). Definizione di misura esterna di Lebesgue in dimensione N. Prime proprietà: il vuoto ha misura nulla, positività, monotonia, subadditività numerabile. *La misura esterna di un plurintervallo coincide col volume.* La misura esterna di una unione finita di plurintervalli a due a due disgiunti.

Misurabilità. Definizione di insieme misurabile alla maniera di Carathéodory. Se I è un rettangolo, allora $\lambda^*(I) = \operatorname{vol} I$. I plurirettangoli sono misurabili. *Teorema di Carathéodory*: l'insieme dei misurabili è stabile per complementi e unioni numerabili, e la misura esterna è numerabilmente additiva sui misurabili. La misura di Lebesgue. Ogni aperto di $\mathbb{R}^N$ è unione di una famiglia numerabile di rettangoli. Gli aperti e i chiusi di $\mathbb{R}^N$ sono misurabili. La misura di Lebesgue è invariante per traslazioni. *L'insieme non misurabile di Vitali.*

Elenco dei teoremi di cui si chiede la dimostrazione all'orale.

1. Il teorema di esistenza di Peano nelle sole ipotesi di continuità.
2. Teorema di Ascoli-Arzelà per successioni di funzioni continue su un intervallo compatto.
3. Una soluzione massimale che passa per il centro di un cilindro di sicurezza è definita su tutta la base.
4. Teorema di esistenza in grande in ipotesi di crescenza sublineare.
5. Il grafico delle soluzioni massimali è chiuso nella topologia di Ω.
6. Fuga dai compatti, e le sue conseguenze sulle equazioni autonome.
7. Teorema del confronto fra sottosoluzioni e soprasoluzioni: senza e con ipotesi di Cauchy-Lipschitz.
8. Calcolo esplicito del periodo dell'oscillazione del pendolo.
9. Il sistema predatore-preda di Lotka-Volterra.
10. La misura esterna di un plurintervallo coincide col volume.
11. Teorema di Carathéodory.
12. L'insieme non misurabile di Vitali.