Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Analisi Matematica 5
Programma

Prof. Gianluca Gorni

Testi di riferimento: Giuseppe De Marco, *Analisi Due* (seconda edizione), Decibel-Zanichelli, capitoli 6 e 11. Materiale didattico attinente al corso è anche disponibile presso

`http://www.dimi.uniud.it/gorni/Istituzioni`

Nel seguito si indicano in *corsivo* i teoremi di cui è richiesta la dimostrazione all'orale, e di essi è riportato un elenco a parte alla fine.

Regolamento d'esame: L'esame consiste di uno scritto e un orale. Per lo scritto sono concesse tre ore. Gli scritti possono essere ripetuti senza limitazioni, ma ogni scritto consegnato annulla i precedenti. Chi ha superato lo scritto a un appello può dare l'orale in qualsiasi appello, o anche su appuntamento individuale.

1. Equazioni differenziali

Teorema di Esistenza locale di Peano. Definizione di problema di Cauchy e di sua soluzione per un'equazione differenziale. Interpretazione geometrica. Enunciato del *teorema di esistenza di Peano* in ipotesi di continuità. Cilindri di sicurezza per un'equazione differenziale. Tutte le soluzioni del problema di Cauchy sono contenute nel cilindro di sicurezza finché i tempi sono nella base. Esistenza di cilindri di sicurezza quando la f è continua. Enunciato completo del teorema di esistenza di Peano in un cilindro di sicurezza. Definizione delle poligonali di Eulero, con interpretazione geometrica. Proprietà delle poligonali di Eulero: sono lipschitziane finché non escono dal cilindro; non escono dal cilindro; sono equilimitate ed equilipschitziane. Le poligonali di Eulero sono "soluzioni approssimate". Se la successione delle poligonali di Eulero converge uniformemente, allora il limite è una soluzione del problema di Cauchy. Enunciato del *teorema di Ascoli-Arzelà* per successioni di funzioni equilimitate ed equiuniformemente continue su un compatto. Una successione di funzioni equilimitate su un insieme numerabile ha sempre una sottosuccessione che converge puntualmente. Conclusione della dimostrazione del teorema di Ascoli-Arzelà. L'esempio classico di problema di Cauchy senza unicità: $y' = \sqrt{|y|}$, $y(0) = 0$.

Soluzioni massimali, unicità e non unicità locale. L'insieme delle soluzioni di un problema di Cauchy ordinato per inclusione dei grafici, soluzioni estendibili e non estendibili (massimali). Principio di massimalità di Hausdorff (enunciato). Esistenza di estensioni non estendibili di una soluzione data. Unicità della soluzione non estendibile in ipotesi di Lipschitz locale (senza dimostrazione).

Esistenza in grande, fuga dai compatti, confronto. *Una soluzione massimale che passa per il centro di un cilindro di sicurezza è definita su tutta la base.* Esplosione in tempo finito per la soluzione massimale di $y' = y^2$, $y(0) = 1$. Il problema dell'esistenza in grande. Il dominio di una soluzione massimale è sempre un intervallo aperto. *Teorema di esistenza in grande in ipotesi di crescenza sublineare.*

Studio qualitativo dell'equazione $y' = 1/(y^2 + t^2)$. L'equazione differenziale verificata dalle inverse delle soluzioni di un'equazione scalare. *Il grafico delle soluzioni massimali è un sottinsieme chiuso dell'insieme Ω di definizione di $f(t, y)$. Fuga dai compatti, e le sue conseguenze sulle equazioni autonome.* Sopra e sottosoluzioni di un'equazione scalare del primo ordine. *Il teorema del confronto per equazioni scalari del primo ordine: versione senza ipotesi su $f(t, y)$, e versione con lipschitzianità locale.* Il criterio dell'asintoto. I punti limite di soluzioni di equazioni autonome sono equilibri (se in essi è definito il secondo membro). Esercizio: studio dell'equazione $y' = g(t, y) \operatorname{sen}^2 y$. Esercizio: studio dell'equazione $y' = e^{y^2} - e^{x^2}$. Esercizio: studio dell'equazione $y'' = e^y y'$. Se $\lambda(y) > 0$ le soluzioni di $y' = g(y)$ e di $y' = \lambda(y)g(y)$ sono riparametrizzazione temporale una dell'altra.

Integrali primi. Costanti del moto (o integrali primi). Esempio: il sistema $x = yz$, $y = -xz$, $z = -k^2xy$. Sistemi conservativi e l'integrale primo dell'energia per l'equazione $y'' = g(y)$. *L'equazione del pendolo $\theta'' = -(g/\ell) \operatorname{sen} \theta$*: studio qualitativo degli insiemi di livello dell'energia, studio quantitativo delle soluzioni periodiche. Equazioni differenziali totali e fattore integrante. *Il sistema preda-predatore di Lotka-Volterra.*

Equazioni non lineari risolubili analiticamente. Metodi per la risoluzione esplicita di equazioni differenziali: equazioni omogenee, equazioni del tipo $y' = g(ay + bt + c)$, $y' = g((ay + bt + c)/(py + qt + r))$. Le traiettorie dell'equazione $y'' = f(y, y')$ nel piano delle fasi (y, y') risolvono un'equazione del prim'ordine. Equazioni di Bernoulli. Esercizio: studio dell'equazione $(x + y + 1)dx + (2x + 2y - 1)dy = 0$. Esercizio: studio delle equazioni $uu' = u^2 - t$, $y'' = (y')^2 - y$. Esercizio: studio dell'equazione $(2x^2y + y^2)dx + (2x^3 - xy)dy = 0$. Cenni all'uso del computer per lo studio delle equazioni differenziali.

2. La misura di Lebesgue

La misura esterna di Lebesgue. Difetti della teoria della misura secondo Peano-Jordan. Plurintervalli (rettangoli, scatole) n-dimensionali e loro volume. Definizione di misura esterna di Lebesgue in dimensione N. Prime proprietà: il vuoto ha misura nulla, positività, monotonia, subadditività numerabile. *La misura esterna di un plurintervallo coincide col volume.* La misura esterna di una unione finita di plurintervalli a due a due disgiunti.

Misurabilità. Definizione di insieme misurabile alla maniera di Carathéodory. Se I è un rettangolo, allora $\lambda^*(I) = \operatorname{vol} I$. I plurirettangoli sono misurabili. *Teorema di Carathéodory*: l'insieme dei misurabili è stabile per complementi e unioni numerabili, e la misura esterna è numerabilmente additiva sui misurabili. La misura di Lebesgue. Ogni aperto di $\mathbb{R}^N$ è unione di una famiglia numerabile di rettangoli. Gli aperti e i chiusi di $\mathbb{R}^N$ sono misurabili. La misura di Lebesgue è invariante per traslazioni. *L'insieme non misurabile di Vitali.* Cenno al paradosso di Banach-Tarski.

L'insieme di Cantor. Costruzione dell'insieme di Cantor. L'insieme di Cantor ha la stessa cardinalità dell'insieme dei numeri reali. L'insieme di Cantor e le rappresentazioni dei numeri in base 3. Proprietà topologiche dell'insieme di Cantor: compattezza, totale sconnessione. L'insieme di Cantor ha misura di Lebesgue nulla. Ogni insieme di misura esterna nulla è misurabile. La famiglia dei misurabili secondo Lebesgue ha la stessa cardinalità dell'insieme delle parti di $\mathbb{R}$. Cenno a varianti dell'insieme di Cantor con misura strettamente maggiore di zero.

Elenco dei teoremi di cui si chiede la dimostrazione all'orale.

1. Il teorema di esistenza di Peano nelle sole ipotesi di continuità.
2. Teorema di Ascoli-Arzelà per successioni di funzioni continue su un intervallo compatto.
3. Una soluzione massimale che passa per il centro di un cilindro di sicurezza è definita su tutta la base.
4. Teorema di esistenza in grande in ipotesi di crescenza sublineare.
5. Il grafico delle soluzioni massimali è chiuso nella topologia di Ω.
6. Fuga dai compatti, e le sue conseguenze sulle equazioni autonome.
7. Soprasoluzioni e sottosoluzioni di un'equazione scalare e teorema del confronto.
8. Studio quantitativo dell'equazione del pendolo nel caso oscillatorio.
9. Il sistema predatore-preda di Lotka-Volterra.
10. La misura esterna di un plurintervallo coincide col volume.
11. Teorema di Carathéodory.
12. L'insieme non misurabile di Vitali.