Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Analisi Matematica 5
Programma

Prof. Gianluca Gorni

Testi di riferimento: Giuseppe De Marco, *Analisi Due* (seconda edizione), Decibel-Zanichelli, capitoli 6 e 11. Materiale didattico attinente al corso è anche disponibile presso

`http://www.dimi.uniud.it/gorni/Istituzioni`

Nel seguito si indicano in *corsivo* i teoremi di cui è richiesta la dimostrazione all'orale, e di essi è riportato un elenco a parte alla fine.

Regolamento d'esame: L'esame consiste di uno scritto e un orale. Per lo scritto sono concesse tre ore. Gli scritti possono essere ripetuti senza limitazioni, ma ogni scritto consegnato annulla i precedenti. Chi ha superato lo scritto a un appello può dare l'orale in qualsiasi appello, o anche su appuntamento individuale.

1. Equazioni differenziali

Teorema di Esistenza locale di Peano. Richiami sulla definizione di equazione differenziale, problema di Cauchy, e soluzioni. Enunciato del teorema di esistenza locale di Peano in ipotesi di continuità. Se $\|y'(t)\| \le M$ allora $y(t)$ è lipschitziana di costante M. Interpretazione geometrica della lipschitzianità. Definizione di cilindro di sicurezza per un problema di Cauchy. Esistenza di cilindri di sicurezza in ipotesi di continuità. *Il teorema di esistenza di Peano*: poligonali di Eulero e loro proprietà: non escono dal cilindro di sicurezza, sono equilipschitziane ed equilimitate, le poligonali di Eulero sono "soluzioni approssimate", il limite uniforme di una sottosuccessione di poligonali di Eulero è soluzione del problema di Cauchy. *Il teorema di Ascoli-Arzelà per successioni di funzioni su un intervallo compatto*: dimostrazione col metodo diagonale. Variante del teorema di Ascoli-Arzelà: caratterizzazione dei sottinsiemi compatti di $C([0,1])$. Usabilità numerica delle poligonali di Eulero. Un esempio di non unicità della soluzione del problema di Cauchy. Esperimenti numerici al computer sulle poligonali di Eulero.

Soluzioni massimali, unicità e non unicità locale. L'insieme delle soluzioni di una equazione differenziale e il suo ordinamento parziale per inclusione. Soluzioni massimali (o non prolungabili). Incollamento (o concatenazione) di soluzioni. Principio di massimalità di Hausdorff (enunciato equivalente dell'assioma di scelta). In ipotesi di esistenza locale, per ogni punto passa almeno una soluzione massimale. In ipotesi di esistenza e unicità locale, per ogni punto passa una e una sola soluzione massimale.

Esistenza in grande e fuga dai compatti. Il problema dell'esistenza in grande. Esempio di equazione con soluzioni che esplodono in tempo finito: $y' = y^2$. *Una soluzione massimale che passa per il centro di un cilindro di sicurezza è definita su tutta la base. Teorema di esistenza in grande in ipotesi di crescenza sublineare.*

Esempi. Studio qualitativo dell'equazione $y' = 1/(t^2 + y^2)$. Come scambiare fra loro variabile indipendente e dipendente. *Il grafico di una soluzione massimale è chiuso nella topologia di* Ω. Teorema di fuga dai compatti di Ω. Equazioni autonome e invarianza per traslazioni temporali. Se una soluzione massimale di un'equazione autonoma è sempre contenuta in un compatto, allora è definita per tutti i tempi reali. Esempio. *Soprasoluzioni e sottosoluzioni di un'equazione scalare e teorema del confronto.* Criterio dell'asintoto. Un punto asintotico di un'equazione autonoma è un punto d'equilibrio. Studio dell'equazione $y' = g(t,y)\,\mathrm{sen}^2 y$. Studio qualitativo dell'equazione $y' = e^{y^2} - e^{t^2}$. Studio dell'equazione $y'' = e^y y'$. Equazioni autonome: cambio dell'intensità del campo e riparametrizzazione delle soluzioni.

Integrali primi. Integrali primi (o costanti del moto) di un'equazione autonoma. Esempio: il sistema $x' = yz$, $y' = -xz$, $z' = -xy$. L'integrale primo dell'energia per i sistemi del tipo $\ddot{y} = f(y)$. *L'equazione del pendolo: studio qualitativo degli insiemi di livello dell'energia, studio quantitativo delle soluzioni periodiche, calcolo del periodo.* Equazioni differenziali totali e fattore integrante. *Il sistema predatore-preda di Lotka-Volterra.*

Equazioni non lineari risolubili analiticamente. Equazioni a variabili separabili: formula risolutiva e discussione dell'unicità o non unicità lungo le rette di equilibrio. Equazioni differenziali per le quali l'insieme delle soluzioni è invariante per omotetie (rispetto all'origine o a un altro punto) o per traslazione di multipli di un vettore. Equazioni omogenee, equazioni della forma $y'(x) = g(ax + by + c)$, $y'(x) = g((ax+by+c)/(px+qy+r))$. Le traiettorie dell'equazione $y'' = f(y, y')$ nel piano delle fasi (y, y') risolvono un'equazione del prim'ordine. Equazioni di Bernoulli. Esempi: l'equazione $(x + y + 1)dx + (2x + 2y - 1)dy = 0$, l'equazione $uu' = u^2 - t$, l'equazione $y'' = (y')^2 - y$.

2. La misura di Lebesgue

La misura esterna di Lebesgue. Plurintervalli (rettangoli, scatole) n-dimensionali e loro volume. Definizione di misura esterna di Lebesgue in dimensione N. Prime proprietà: il vuoto ha misura nulla, positività, monotonia, subadditività numerabile. *La misura esterna di un plurintervallo coincide col volume.* La misura esterna di una unione finita di plurintervalli disgiunti.

Misurabilità. Definizione di insieme misurabile alla maniera di Carathéodory. I plurirettangoli sono misurabili. *Teorema di Carathéodory*: l'insieme dei misurabili è stabile per complementi e unioni numerabili, e la misura esterna è numerabilmente additiva sui misurabili. La misura di Lebesgue. L'insieme dei misurabili è stabile per differenze e intersezioni finite o numerabili. Ogni aperto di $\mathbb{R}^N$ è unione di una famiglia numerabile di rettangoli. Gli aperti e i chiusi di $\mathbb{R}^N$ sono misurabili. La misura di Lebesgue è invariante per traslazioni. *L'insieme non misurabile di Vitali.*

L'insieme di Cantor. Costruzione dell'insieme di Cantor. *L'insieme di Cantor ha la stessa cardinalità dell'insieme dei numeri reali.* L'insieme di Cantor e le rappresentazioni dei numeri in base 3. Proprietà topologiche dell'insieme di Cantor: compattezza, totale sconnessione. L'insieme di Cantor ha misura di Lebesgue nulla. Ogni insieme di misura esterna nulla è misurabile. La famiglia dei misurabili secondo Lebesgue ha la stessa cardinalità dell'insieme delle parti di $\mathbb{R}$. Varianti dell'insieme di Cantor con misura strettamente maggiore di zero.

Elenco dei teoremi di cui si chiede la dimostrazione all'orale.

1. Il teorema di esistenza di Peano nelle sole ipotesi di continuità.
2. Teorema di Ascoli-Arzelà per successioni di funzioni continue su un intervallo compatto.
3. Una soluzione massimale che passa per il centro di un cilindro di sicurezza è definita su tutta la base.
4. Teorema di esistenza in grande in ipotesi di crescenza sublineare.
5. Il grafico delle soluzioni massimali è chiuso nella topologia di Ω.
6. Soprasoluzioni e sottosoluzioni di un'equazione scalare e teorema del confronto.
7. Studio quantitativo dell'equazione del pendolo nel caso oscillatorio e calcolo del periodo.
8. Il sistema predatore-preda di Lotka-Volterra.
9. La misura esterna di un plurintervallo coincide col volume.
10. Teorema di Carathéodory.
11. L'insieme non misurabile di Vitali.
12. L'insieme di Cantor ha la stessa cardinalità dell'insieme dei numeri reali.