Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Analisi Matematica 5
Programma

Prof. Gianluca Gorni

Testi di riferimento: Giuseppe De Marco, *Analisi Due* (seconda edizione), Decibel-Zanichelli, capitoli 6 e 11. Materiale didattico attinente al corso è anche disponibile presso

`http://www.dimi.uniud.it/~gorni/Istituzioni`

Nel seguito si indicano in *corsivo* i teoremi di cui è richiesta la dimostrazione all'orale, e di essi è riportato un elenco a parte alla fine.

Regolamento d'esame: L'esame consiste di uno scritto e un orale. Per lo scritto sono concesse tre ore. Gli scritti possono essere ripetuti senza limitazioni, ma ogni scritto consegnato annulla i precedenti. Chi ha superato lo scritto a un appello può dare l'orale in qualsiasi appello, o anche su appuntamento individuale.

1. Equazioni differenziali

Problema di Cauchy, soluzioni massimali, unicità locale. Problema di Cauchy per un'equazione differenziale. Definizione di soluzione. Se c'è una soluzione, ce ne sono infinite. Ordinamento parziale nell'insieme delle soluzioni e soluzioni massimali. Se esiste una soluzione, allora esistono soluzioni massimali (usando il lemma di Zorn). Definizione di unicità locale. Se un problema ha unicità locale, allora esiste una sola soluzione massimale. Esempio di un problema di Cauchy con infinite soluzioni massimali.

Il teorema di esistenza locale di Peano. *Il teorema di esistenza di Peano nelle sole ipotesi di continuità.* Cilindri di sicurezza. Poligonali di Eulero e loro proprietà: equilimitatezza, equilipschitzianità, se una sottosuccessione converge uniformemente allora il limite è una soluzione. *Teorema di Ascoli-Arzelà*: se una successione di funzioni su $[a,b]$ è equicontinua ed equilimitata, allora si può estrarre una sottosuccessione convergente. Dimostrazione col metodo diagonale. Esempio di esistenza e unicità senza ipotesi di Lipschitz: $y' = y\log|y|$. Esistenza e unicità o non unicità per le equazioni differenziali a variabili separabili della forma $y' = f(y)$.

Esistenza in grande. Il problema dell'esistenza in grande. Esempio di non esistenza in grande, con esplosione: $y' = y^2$, $y(0) = 1$. Teorema debole di esistenza e unicità in grande in ipotesi di Lipschitz globali (dimostrazione a grandi linee). *Teorema forte di esistenza in grande in ipotesi di crescenza sublineare.* Una soluzione massimale che passa per il centro di un cilindro di sicurezza è definita su tutto l'intervallo base. Il teorema di esistenza in grande in ipotesi di Lipschitz è contenuto nel teorema in ipotesi di crescenza sublineare. Esempio: esistenza in grande per l'equazione $y' = 1/(t^2 + y^2)$.

Fuga dai compatti e andamento asintotico. Un cilindro di sicurezza ne contiene altri più piccoli. *Il grafico delle soluzioni massimali è chiuso nella topologia di* Ω. Fuga dai compatti. Esistenza in grande delle soluzioni massimali le cui coordinate spaziali rimangano in un compatto. Esistenza in grande per sistemi autonomi le cui soluzioni rimangono in compatti. Esempio. Soprasoluzioni, sottosoluzioni, e teorema del confronto. Criterio dell'asintoto. Le soluzioni massimali di un sistema autonomo che convergono a un punto sono in grande e il punto è di equilibrio. Esempi.

Integrali primi. Equazioni autonome con campi aventi la stessa direzione: le soluzioni di un sistema si ottengono dalle soluzioni dell'altro con un cambio di parametro temporale, e quindi hanno le stesse traiettorie. Integrali primi, o costanti del moto, per sistemi autonomi. Esempio. L'equazione del pendolo: studio qualitativo. *Studio quantitativo dell'equazione del pendolo nel caso oscillatorio e calcolo del periodo.* Uso del computer per lo studio delle equazioni differenziali.

2. Integrali curvilinei

Integrazione secondo Henstock-Kurzweil. Preliminari all'integrale: trapezoidi, suddivisioni marcate, plurirettangoli, somme di Riemann. Definizione di integrale secondo Riemann. Calibri e suddivisioni adattate a un calibro. Definizione di integrale secondo Henstock-Kurzweil. Esistenza di suddivisioni adattate a un dato calibro. Unicità dell'integrale. *Il teorema fondamentale del calcolo.* Lemma sulle derivate. Dimostrazione del teorema fondamentale del calcolo per l'integrale secondo Henstock-Kurzweil. Esempio di funzione integrabile secondo Henstock-Kurzweil ma non secondo Lebesgue. Sunto di teoria dell'integrazione secondo Henstock-Kurzweil.

Lunghezza di una curva e integrale nel differenziale d'arco. Curve in $\mathbb{R}^N$: poligonali inscritte, lunghezza, curve rettificabili. Esempio di una curva non rettificabile. *La formula della lunghezza di una curva derivabile*, in termini di integrale secondo Henstock-Kurzweil. Definizione di integrale curvilineo nel differenziale d'arco, usando il metodo di Henstock-Kurzweil. Invarianza per cambi di parametro omeomorfi. Formula dell'integrale nel differenziale d'arco per una curva derivabile.

Forme differenziali lineari e loro integrale lungo le curve. Definizione di forma differenziale di grado 1 su un aperto di $\mathbb{R}^N$. Confronto col concetto di campo vettoriale. Esempi. Il differenziale di una funzione scalare differenziabile, visto come forma differenziale. Forme differenziali esatte. Definizione di integrale di una forma differenziale lungo una curva, usando il metodo di Henstock-Kurzweil. Formula dell'integrale di una forma differenziale per una curva derivabile. Generalizzazione al caso di una curva continua che sia derivabile eccetto in un insieme al più numerabile di punti. Esempio di calcolo di un integrale di forma differenziale lungo una curva. *Il teorema fondamentale per l'integrale di una forma esatta lungo una curva.*

Forme differenziali chiuse. Condizione necessaria perché una forma differenziale C^1 sia esatta è che la matrice jacobiana sia simmetrica. Forme differenziali chiuse. Esempio di una forma non chiusa, e quindi non esatta. Esempio di una forma chiusa ma non esatta: $(-y\,dx + x\,dy)/(x^2+y^2)$. Insiemi stellati. *Lemma di Poincaré*: una forma di classe C^1 e chiusa definita su un insieme stellato è esatta.

Integrali curvilinei di forme differenziali localmente esatte. Forme localmente esatte. Per forme di classe C^1 essere chiuse equivale a essere localmente esatte. Relazione fra l'integrabilità di una forma differenziale su una curva e l'integrabilità su sottocurve. Il numero di Lebesgue di un ricoprimento. Come definire l'integrale di una forma localmente esatta su una curva che sia solo continua: teorema di approssimazione con una successione di curve derivabili o continue e rettificabili che convergono uniformemente alla curva data. *Per una forma continua o localmente esatta si equivalgono: (a) la forma è esatta; (b) l'integrale lungo ogni cammino dipende solo dagli estremi; (c) l'integrale lungo ogni circuito è zero.*

Omotopie di circuiti. Definizione di omotopia fra circuiti. *L'integrale di una forma localmente esatta su due circuiti fra loro omotopi è uguale.* Spazi topologici semplicemente connessi. Una forma localmente esatta su un aperto semplicemente connesso è esatta. Gli insiemi stellati sono semplicemente connessi. Il piano privato di un punto non è semplicemente connesso. Lo spazio tridimensionale privato di una retta non è semplicemente connesso. Esempi di forme localmente esatte o esatte, e loro integrali su cammini.

Elenco dei teoremi di cui si chiede la dimostrazione all'orale.

1. Il teorema di esistenza di Peano nelle sole ipotesi di continuità.
2. Teorema di Ascoli-Arzelà per successioni di funzioni continue su un intervallo compatto.
3. Teorema forte di esistenza in grande in ipotesi di crescenza sublineare.
4. Il grafico delle soluzioni massimali è chiuso nella topologia di Ω.
5. Studio quantitativo dell'equazione del pendolo nel caso oscillatorio e calcolo del periodo.
6. Il teorema fondamentale del calcolo per l'integrale secondo Henstock-Kurzweil.
7. La formula della lunghezza di una curva derivabile.
8. Il teorema fondamentale per l'integrale di una forma esatta lungo una curva.
9. Lemma di Poincaré sulle forme differenziali chiuse su insiemi stellati.
10. Condizioni equivalenti all'esattezza di una forma differenziale in termini di integrali curvilinei.
11. L'integrale di una forma localmente esatta su due circuiti fra loro omotopi è uguale.