Università degli Studi di Udine Anno Accademico 2004/2005

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Analisi Matematica 5
Programma

Prof. GIANLUCA GORNI

Testo di riferimento: ALESSANDRO FONDA, *Lezioni sulla teoria dell'integrale*, Edizioni Goliardiche, Trieste. Materiale didattico attinente al corso è anche disponibile presso
`http://www.dimi.uniud.it/~gorni/Istituzioni`

Nel seguito si indicano in *corsivo* i teoremi di cui è richiesta la dimostrazione all'orale, e di essi è riportato un elenco a parte alla fine.

Regolamento d'esame: L'esame consiste di uno scritto e un orale. Per lo scritto sono concesse tre ore. Gli scritti possono essere ripetuti senza limitazioni, ma ogni scritto consegnato annulla i precedenti. Chi ha superato lo scritto a un appello può dare l'orale in qualsiasi appello, o anche su appuntamento individuale.

1. L'integrazione secondo Henstock-Kurzweil

Suddivisioni marcate, somme di Riemann, integrale secondo Riemann. Motivazione per l'integrale: l'area di una figura piana. Trapezoidi. Suddivisioni marcate di un intervallo. Plurirettangoli. Somme di Riemann associate a una funzione e a una suddivisione marcata. Ci si aspetta che all'infittirsi della suddivisione le somme si stabilizzino attorno al valore dell'area. L'ampiezza di una suddivisione. Definizione di integrale secondo Riemann usando le somme di Riemann. Cenni storici alle varie definizioni di integrale. Esempio di una funzione non integrabile secondo Riemann: $1/\sqrt{x}$ su $[0,1]$.

Calibri. Difetti del meccanismo dell'integrale secondo Riemann, e motivazione per l'introduzione dei calibri. Definizione di calibro e di suddivisione adattata a un calibro. Definizione di integrale secondo Henstock-Kurzweil. Come i calibri possono controllare l'ampiezza di una suddivisione e la posizione dei punti marcati. Concatenazione di suddivisioni su intervalli adiacenti. Il problema della costruzione di suddivisioni adattate a un dato calibro. *Teorema di Cousin sull'esistenza di suddivisioni adattate a un dato calibro*: dimostrazione per bisezione. Unicità dell'integrale.

Il teorema fondamentale del calcolo. *Il teorema fondamentale del calcolo su un intervallo compatto.* Esempi. Un lemma sulle funzioni derivabili. Somme telescopiche. Dimostrazione del teorema fondamentale per le funzioni aventi primitive globali. Il teorema fondamentale nel caso in cui la primitiva sia continua ma non derivabile in un punto. Applicazione. *Integrabilità della funzione di Dirichlet.* Il teorema fondamentale nel caso in cui la primitiva sia continua ma sia non derivabile in un'infinità non numerabile di punti.

Integrale e teorema fondamentale in due variabili. Funzioni di due variabili definite su un rettangolo: suddivisioni marcate di un rettangolo, somme di Riemann, definizione di integrale. Il teorema fondamentale del calcolo per funzioni su un rettangolo con primitiva doppia mista di classe C^2: $\int_{[a,b]\times[c,d]}(\partial^2 F)/(\partial x\partial y) = F(b,d) - F(a,d) - F(b,c) + F(a,c)$. Incrementi misti del secondo ordine e teorema del valor medio con le derivate seconde miste. Dimostrazione del teorema fondamentale su rettangoli, con primitive seconde miste di classe C^2. Generalizzazioni. Esempi di calcolo di integrali su rettangoli: caso continuo e caso con singolarità.

Condizione di Cauchy e integrabilità delle funzioni continue. Condizione di Cauchy per l'integrabilità. *Teorema dell'integrabilità su sottointervalli di un intervallo compatto.* Ridefinizione di integrabilità secondo Riemann come caso particolare dell'integrabilità secondo Henstock-Kurzweil, e relativa condizione di Cauchy. Teorema dell'integrabilità (secondo Riemann) delle funzioni continue su un intervallo. Se una f integrabile è continua in x_0, allora la sua funzione integrale F è derivabile in quel punto e $F'(x_0) = f(x_0)$.

Funzioni assolutamente integrabili, o integrabili secondo Lebesgue. Teorema di Saks-Henstock e suoi corollari. Funzioni integrabili secondo Lebesgue, o assolutamente integrabili. *Teorema di caratterizzazione delle funzioni integrabili secondo Lebesgue su un intervallo compatto.* Cenni al caso bidimensionale. Massimo e minimo di due funzioni integrabili secondo Lebesgue è ancora integrabile secondo Lebesgue. L'insieme L^1 delle funzioni integrabili secondo Lebesgue è uno spazio vettoriale seminormato. Esempio di una funzione integrabile ma con valore assoluto non integrabile.

Passaggio al limite sotto il segno di integrale. Passaggio al limite sotto il segno di integrale: esempi in cui non vale. *Teorema della convergenza monotona.* Per l'integrale secondo Riemann il teorema della convergenza monotona non vale. Teorema dell'integrazione per serie positive. Esempio. Integrabilità del massimo e del minimo di un numero finito di funzioni integrabili, nell'ipotesi che siano tutte maggiori di una stessa funzione integrabile. Richiamo sul massimo e minimo limite di successioni reali. *Il teorema della convergenza dominata.* Esempi di passaggio al limite sotto il segno di integrale usando la convergenza dominata.

Integrali "impropri". Il teorema di Hake sul limite degli integrali su sottointervalli crescenti. Funzioni localmente integrabili e definizione di integrale su intervalli non compatti. Criteri di integrabilità: criterio di Cauchy, del confronto, del confronto asintotico, criterio della serie.

2. Integrazione e misura

Integrazione su un insieme qualsiasi. Definizione di integrabilità di una funzione su un insieme qualsiasi. Lemma: se una funzione è nulla su un rettangolo, ad eccezione di un lato, allora è integrabile con integrale nullo. Una funzione integrabile su un insieme non è necessariamente integrabile su un sottinsieme.

Misurabilità e misura secondo Lebesgue. Funzione caratteristica di un insieme. Definizione di misurabilità di misura un insieme secondo Lebesgue. La differenza, l'unione e l'intersezione di due insiemi limitati misurabili sono misurabili. Additività numerabile della misura di Lebesgue. L'insieme dei misurabili è stabile per complementi, unioni numerabili e intersezioni numerabili. Gli insiemi aperti sono misurabili. Misurabilità degli intervalli semiaperti e degli insiemi numerabili. *L'insieme non misurabile di Vitali.* Cenno al paradosso di Banach-Tarski. *La disuguaglianza di Chebichev.* La controimmagine di intervalli e di aperti tramite una funzione integrabile positiva.

Insiemi trascurabili. Insiemi trascurabili. Esempio: cenno all'insieme di Cantor. Una funzione nulla al di fuori di un insieme trascurabile è integrabile con integrale nullo. Una funzione non negativa è integrabile con integrale nullo se e solo se è nulla fuori da un insieme trascurabile. Predicati veri quasi ovunque. La relazione di eguaglianza quasi ovunque tra le funzioni, e suoi collegamenti con l'integrale. Funzioni definite quasi ovunque e loro integrazione.

Misurabilità e integrabilità alla Lebesgue. Lemma del ricoprimento numerabile adattato. Caratterizzazione degli insiemi misurabili limitati. *Una funzione continua su un compatto è ivi integrabile.* Una funzione integrabile secondo Lebesgue su un insieme limitato è integrabile anche su tutti i sottinsiemi misurabili. Additività numerabile dell'integrale secondo Lebesgue.

2. Calcolo di integrali in più dimensioni

Teorema di Fubini. Suddivisioni "colonnari" di rettangoli adattate a un calibro. *Data una funzione integrabile su un rettangolo, quasi tutte le sue "sezioni" sono integrabili. Formula di riduzione degli integrali su rettangoli (teorema di Fubini).* Esempi di funzioni non integrabili con integrali iterati diversi e di funzioni non integrabili con integrali iterati uguali. Costruzione di funzioni con integrali iterati diversi. La formula della misura di un insieme nel piano in termini delle misure delle sezioni. L'insieme di Sierpiński avente tutte le sezioni orizzontali di misura 1 e tutte le sezioni verticali di misura 0. Esempi concreti di calcolo di integrali e di misure col teorema di Fubini.

Cambio di variabile negli integrali. Enunciato del teorema di cambio di variabili negli integrali. Esempio di applicazione. Esercizi sul cambio di variabile negli integrali doppi. Le isometrie euclidee conservano la misura di Lebesgue. Trasformazioni isocore. Le coordinate polari nel piano. Esempio. Coordinate cilindriche e sferiche nello spazio.

Elenco dei teoremi di cui si chiede la dimostrazione all'orale.

1. Teorema di Cousin sull'esistenza di suddivisioni adattate a un dato calibro.
2. Il teorema fondamentale del calcolo su un intervallo compatto.
3. Integrabilità della funzione di Dirichlet.
4. Teorema dell'integrabilità su sottointervalli di un intervallo compatto.
5. Caratterizzazione dell'integrabilità secondo Lebesgue su un intervallo compatto.
6. Teorema della convergenza monotona.
7. Il teorema della convergenza dominata.
8. L'insieme non misurabile di Vitali.
9. La disuguaglianza di Chebichev.
10. Una funzione continua su un compatto è ivi integrabile.
11. Quasi tutte le "sezioni" di una funzione integrabile su un rettangolo sono integrabili.
12. Formula di riduzione degli integrali su rettangoli (teorema di Fubini).