Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2008/2009

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Analisi Matematica 5

Prova Scritta del 2 settembre 2009

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento d'identità (se chiesto):

Tempo a disposizione: 3 ore.

1. Sia Ω un aperto non vuoto in $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N$ e $f\colon\Omega\to\mathbb{R}^N$ una funzione continua. Per "soluzione" intenderemo una soluzione di $y'(t)=f(t,y(t))$.

a. Dato un punto $(t_0,y_0)\in\Omega$, esiste un suo intorno $V\subset\Omega$ e una $\delta_0>0$ tale che ogni soluzione massimale passante per un punto $(t_1,y_1)\in V$ ha dominio contenente $[t_1-\delta_0,t_1+\delta_0]$.
(Come nel teorema di fuga dai compatti, considerare un cilindro di sicurezza, e poi una suo sottocilindro di raggio metà...).

b. Sia K un compatto contenuto in Ω. Allora esiste una costante $\delta_K>0$ tale che ogni soluzione massimale passante per un punto $(t_1,y_1)\in K$ ha dominio contenente l'intervallo $[t_1-\delta_K,t_1+\delta_K]$.
(Negare la tesi vuol dire che esiste una successione $(t_n,y_n)\in K$ e $\delta_n\to 0^+$ tali che almeno una soluzione massimale per (t_n,y_n) non è definita su tutto $[t_n-\delta_n,t_n+\delta_n]$...)

2. Consideriamo il sistema di equazioni differenziali $x'(t)=-2xy$, $y'(t)=3x^2+y^2-1$.

a. Discutere esistenza e unicità locale (ed eventualmente in grande) delle soluzioni dei problemi di Cauchy.

b. Trovare gli eventuali punti di equilibrio. Trovare esplicitamente le eventuali soluzioni che rimangono sull'asse y.

c. Mostrare che se $t\mapsto(x(t),y(t))$ è una soluzione, allora anche $t\mapsto(-x(t),y(t))$ e $t\mapsto(x(-t),-y(-t))$ sono ancora soluzioni.

d. Trovare l'equazione che deve soddisfare la funzione derivabile $\theta(t)$ affinché le funzioni $x(t):=\cos\theta(t)$, $y(t):=\operatorname{sen}\theta(t)$ siano una soluzione del sistema. Dedurre che le soluzioni del sistema che partono da un punto dentro il cerchio unitario ($x^2+y^2<1$) ci rimangono sempre.

e. Mostrare che la funzione $(x,y)\mapsto(x^2+y^2-1)x$ è una costante del moto. Esplicitando gli insiemi di livello mostrare che le soluzioni del sistema che partono da un punto dentro il cerchio unitario (escluso l'asse y) sono periodiche.

Punti: 10+10, 3+10+5+10+15.