Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2008/2009

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Analisi Matematica 5

Prova Scritta del 25 febbraio 2009

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento d'identità (se chiesto):

Tempo a disposizione: 3 ore.

1. Sia $f\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua e tale che $f(t,y_1)-f(t,y_2) \le y_1-y_2$ ogniqualvolta $t \in \mathbb{R}$ e $y_1 \ge y_2$. Siano $u, v\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ due funzioni derivabili tali che $u'(t) \le f(t,u(t))$ e $f(t,v(t)) \le v'(t)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.

a. Dimostrare che non può essere che $u(t_0) = v(t_0)$ e che $u(t) > v(t)$ per tutti i t in un intorno destro di t_0.
(Rivedere la dimostrazione del teorema del confronto in ipotesi di Cauchy-Lipschitz).

b. Dimostrare che se $u(0) = v(0)$ allora $u(t) \le v(t)$ per tutti i $t \ge 0$.

2. È data l'equazione differenziale $y'(x) = \dfrac{x^3 - 3xy(x)^2}{3x^2y(x) - y(x)^3}$.

a. Discutere esistenza e unicità locale (ed eventualmente in grande) delle soluzioni dei problemi di Cauchy.

b. Trovare le eventuali soluzioni della forma $y(x) = mx$, con m costante.

c. Mostrare che se $x \mapsto y(x)$ è una soluzione, allora anche $x \mapsto -y(x)$, $x \mapsto -y(-x)$ e $x \mapsto y(-x)$ sono soluzioni. Inoltre se $x \mapsto \varphi(x)$ è una soluzione con derivata mai nulla su un intervallo I, allora anche la funzione inversa φ^{-1} è una soluzione su $\varphi(I)$.
(Sia $\psi(y) := \varphi^{-1}(y)$; calcolare $\psi'(\varphi(x))$ usando la formula della derivata della funzione inversa, poi usare $\varphi'(x)$ dato dall'equazione e $x = \psi(\varphi(x))\dots$)

d. Risolvere esplicitamente l'equazione differenziale, per esempio usando l'incognita ausiliaria $u(x) = y(x)/x$.

e. Mostrare che la funzione $(x,y) \mapsto x^4 - 6x^2y^2 + y^4$ è una costante del moto.

Punti: 15+15, 5+5+10+15+10.