Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2008/2009

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Analisi Matematica 5

Prova Scritta del 26 gennaio 2009

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento d'identità (se chiesto):

Tempo a disposizione: 3 ore.

1. Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione (anche non continua), I un intervallo di $\mathbb{R}$, e $y\colon I \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile soluzione di $y'(t) = f(y(t))$.

a. Siano $t_0 \neq t_1 \in I$ e supponiamo che $f(y(t_0)) > 0$. Mostrare che $(y(t_1)-y(t_0))/(t_1-t_0) > 0$. Analogamente, se $f(y(t_0)) < 0$ allora $(y(t_1) - y(t_0))/(t_1 - t_0) < 0$.
(La funzione costante $\bar{y}(t) \equiv y(t_0)$ è una sottosoluzione...)

b. Non possono esistere $t_0, t_1 \in I$ tali che $f(y(t_0)) < 0$ e $f(y(t_1)) > 0$.
(Il rapporto incrementale $(y(t_1) - y(t_0))/(t_1 - t_0)$ non può essere né positivo né negativo né nullo...)

c. Mostrare che la funzione y è (debolmente) monotona.

2. Consideriamo il sistema di equazioni differenziali nel piano $\dot{x} = -(y + 2)y$, $\dot{y} = (y + 2)x$.

a. Discutere esistenza e unicità locale ed eventualmente in grande per i problemi di Cauchy, e trovare i punti di equilibrio.

b. Mostrare che se $t \mapsto (x(t), y(t))$ è una soluzione, allora anche $t \mapsto (-x(-t), y(-t))$ è soluzione.

c. Trovare una costante del moto, per esempio col metodo della separazione delle variabili.

d. Mostrare che tutte le soluzioni massimali sono limitate e sono definite per tutti i $t \in \mathbb{R}$. Inoltre le soluzioni che partono da (x_0, y_0) con $x_0^2 + y_0^2 < 4$ sono periodiche, mentre tutte le altre non sono periodiche (eccetto quando sono costanti).

e. Trovare una formula integrale per il periodo delle soluzioni periodiche.

f. Trovare una formula esplicita per il periodo delle soluzioni periodiche. Suggerimento: la sostituzione $y = r \operatorname{sen} u$ porta a un integrale che a sua volta si può calcolare esprimendolo in termini di $v = \tan(u/2)$.

Punti: 8+8+5, 5+8+8+8+12+15.