Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2007/2008

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Analisi Matematica 5

Prova Scritta del 21 luglio 2008

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento d'identità (se chiesto):

Tempo a disposizione: 3 ore.

1. Data l'equazione differenziale

$$y'(x) = \frac{2y(x)^2}{x\big(y(x) - x\big)}$$

a. Discutere esistenza e unicità locale per i problemi di Cauchy associati. Trovare eventuali soluzioni della forma $y(x) = mx$, con m costante.

b. Mostrare che tutte le soluzioni massimali che passano per $\{(x, y) \mid -x < y < x\}$ sono debolmente decrescenti e sono definite globalmente nel futuro.

c. Mostrare che le funzioni della forma $x \mapsto mx$ sono sottosoluzioni per $x \neq 0$ e $m > 1$. Mostrare poi che le funzioni della forma $x \mapsto cx^3$ per $c > 0$ sono soprasoluzioni dove $x > 3/\sqrt{c}$. Inoltre, dato un punto (x_0, y_0) tale che $y_0 > x_0 > 0$, esiste $c > 0$ tale che $x_0 > 3/\sqrt{c}$ e $cx_0^3 > y_0$. Dedurre che le soluzioni massimali dell'equazione differenziale che passano per $\{(x, y) \mid y > x > 0\}$ sono definite globalmente nel futuro e con crescenza al più cubica.

d. Risolvere esplicitamente l'equazione.

e. Disegnare un grafico qualitativo delle soluzioni nel piano (x, y).

f. Mostrare che $F(x, y) := (x + y)^2/(x^2 y)$ è una costante del moto, nel senso che $x \mapsto F(x, y(x))$ è costante su ciascuna soluzione.

2. Sia $\varphi\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ una funzione lipschitziana di costante $L > 0$, cioè $\|\varphi(x) - \varphi(y)\| \leq L\|x - y\|$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$. Sia $E \subset \mathbb{R}$ un insieme trascurabile secondo Lebesgue. Dimostrare che $\varphi(E)$ è pure trascurabile.
(Si può partire con $N = 1$ e un ricoprimento di E con intervalli I_n e vederne l'immagine tramite φ).

Punti: 5+12+15+10+10+5, 15.