Università degli Studi di Udine

Anno Accademico 2007/08

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Analisi Matematica 5

Prova Scritta del 14 aprile 2008

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento d'identità (se chiesto):

Tempo a disposizione: 3 ore.

1. Sia $f\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ una funzione continua e limitata. Sia $n \mapsto x_n$ una successione in $\mathbb{R}^N$ convergente a $\bar{x}$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia $y_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una soluzione massimale del problema di Cauchy $y_n'(t) = f(t, y_n(t))$, $y_n(0) = x_n$. Dimostrare che esiste una sottosuccessione y_{n_k} che converge puntualmente (e uniformemente su ciascun compatto di $\mathbb{R}$) a una soluzione massimale del problema $\bar{y}'(t) = f(t, \bar{y}(t))$, $\bar{y}(0) = \bar{x}$. Se per caso il problema con dato iniziale $\bar{x}$ ha soluzione massimale *unica*, allora la successione y_n tutta quanta converge a $\bar{y}$. (Su ciascun compatto fissato si usa il teorema di Ascoli-Arzelà, e il passaggio al limite sotto il segno di integrale…)

2. Si consideri il sistema di equazioni differenziali $x'(t) = (1-y(t))x(t)^2$, $y'(t) = (x(t)^2-1)y(t)$.

a. Discutere esistenza e unicità locale, ed eventualmente in grande.

b. Trovare eventuali punti di equilibrio (cioè le soluzioni costanti). Risolvere esplicitamente le equazioni nel caso di dati iniziali su uno dei due assi cartesiani.

c. Trovare una costante del moto.
(Passare all'equazione "totale" associata, che è a variabili separabili…)

d. Mostrare che tutte le soluzioni massimali che passano per il primo quadrante sono definite globalmente in t e periodiche.
(Studiare gli insiemi di livello della costante del moto, in analogia con l'equazione di Lotka-Volterra; qui addirittura gli insiemi di livello si possono esplicitare).

3. Consideriamo la trasformazione lineare nel piano $\mathbb{R}^2$ definita da $\varphi(x,y) := (x, x+y)$.

a. Sia I un rettangolo limitato in $\mathbb{R}^2$ ed $\varepsilon > 0$. Mostrare che $\varphi(I)$ è un parallelogramma, e che si può ricoprire con un numero finito di rettangoli $I_1 \dots I_n$ a due a due disgiunti e tali che $\sum_{k=1}^n \operatorname{area}\varphi(I_k) < \operatorname{area} I + \varepsilon$.
(Affettare I e $\varphi(I)$ in listarelle verticali di spessore sufficientemente piccolo…)

b. Il punto **a** precedente vale anche con φ^{-1} al posto di φ.
(L'inversa si calcola facilmente…)

c. Mostrare che per ogni sottinsieme limitato E del piano, l'immagine $\varphi(E)$ ha la stessa misura esterna (secondo Lebesgue) di E. Si può fare a meno dell'ipotesi che E sia limitato?

Punti: 20, 4+6+8+12, 10+5+8.