Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2007/08

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Analisi Matematica 5

Prova Scritta del 10 gennaio 2008

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento d'identità (se chiesto):

Tempo a disposizione: 3 ore.

1. Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua (ma non necessariamente localmente lipschitziana), tale che $f(0) = 0$ e che $f(x) > 0$ per $x > 0$. Consideriamo il problema di Cauchy autonomo $y'(t) = f(y(t))$, $y(0) = 0$. Ci chiediamo se ci sono altre soluzioni oltre a quella banale identicamente nulla. Sia F una primitiva di $1/f$ su $]0, +\infty[$ (cioè $F'(x) = 1/f(x)$ per $x > 0$; esiste?). Sia $F(0^+) = \lim_{x\to 0^+} F(x)$ (esiste?).

a. Mostrare che se $y(t)$ è soluzione, allora $y(t) \le 0$ per $t \le 0$. (le costanti positive sono sottosoluzioni...)

b. Se $y(t)$ è soluzione e se $y(t) > 0$ per ogni $t \in I$ intervallo, allora $F(y(t)) - t$ è costante su I.

c. Se $F(0)^+$ è finito, allora esistono infinite soluzioni massimali diverse del problema di Cauchy, per le quali $y(t) > 0$ per qualche $t > 0$. (Si può incollare la soluzione nulla con $t \mapsto F^{-1}(F(0^+) + t - t_0)$ per $0 \le t_0 < t < t_0 - F(0^+) + F(+\infty)$...).

d. Se $F(0^+) = -\infty$ e $y(t)$ è soluzione, allora $y(t) \le 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. (Supponiamo $y(t_0) > 0$ per un qualche t_0; sia I la componente connessa di $\{t \ : \ y(t) > 0\}$ contenente t_0; sia $t_1 = \inf I$; passare al limite $F(y(t)) - t$ per $t \to t_1^+$...)

2. Si consideri l'equazione differenziale $y'(t) = \dfrac{2 + 3(t + y(t))^2}{1 - 3(t + y(t))^2}$.

a. Discutere esistenza e unicità locale, ed eventualmente in grande.

b. Mostrare che se $y(t)$ è soluzione, allora anche $\tilde{y}(t) := y(t + c) + c$ è soluzione, per ogni costante c.

c. Mostrare che l'equazione verificata dalla nuova funzione incognita $z(t) := t + y(t)$ è a variabili separabili.

d. Mostrare che $t \mapsto y(t) - 2t - (t + y(t))^3$ è costante se $y(t)$ è soluzione.

3. Sia T il triangolo $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \le x < 1, 0 \le y \le x\}$.

a. Mostrare che T è misurabile secondo Lebesgue in dimensione 2.

b. Mostrare che $\displaystyle\bigcup_{i=0}^{n-1} [i/n, (i+1)/n[\times [0, i/n] \subseteq T \subseteq \bigcup_{i=0}^{n-1} [i/n, (i+1)/n[\times [0, (i+1)/n] \ \forall n \ge 1$.

c. Mostrare che T ha misura $1/2$ secondo Lebesgue.

Punti: 8+5+12+8, 4+6+8+8+8, 5+8+8.