Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2007/08

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Analisi Matematica 5

Prova Scritta del 10 dicembre 2007

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento d'identità (se chiesto):

Tempo a disposizione: 3 ore.

1. Sia $f\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una funzione continua. Poniamo $g(x) := c(1+|x|)\log(1+|x|)$, per una costante $c>0$. Supponiamo che $|f(t,x)| < g(x)$ per ogni $t\in\mathbb{R}$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Dimostrare che allora ogni soluzione massimale di $y' = f(t,y)$ è definita su tutto $\mathbb{R}$.
(Confrontare y con le soluzioni di $z' = g(z)$, e usare l'uscita dai compatti).

2. Consideriamo il sistema di equazioni differenziali $x'(t) = 3y^2 - 2xy + x$, $y'(t) = y^2 - y + 2x$.

a. Discutere esistenza e unicità locale ed eventualmente in grande, e trovare i punti di equilibrio.

b. Mostrare che se una soluzione parte su un punto della diagonale $y = x$, ci rimane sempre, e trovarne la formula esplicita.

c. Trovare una costante del moto.

d. Mostrare che le soluzioni che passano per l'insieme $\{(x,y)\ :\ y < x < -y^2\}$ ci rimangono sempre e sono periodiche.

3. Sia $F\colon\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}$ una funzione scalare di classe C^1, tale che $F(x)$ tenda a $+\infty$ quando $\|x\|\to+\infty$. Sia $0\in I$ un intervallo non degenere, e sia $y\colon I\to\mathbb{R}^N$ una soluzione massimale di $y'(t) = -\nabla F(y(t))$ ("percorso di massima pendenza").

a. Mostrare che $t\mapsto F(y(t))$ è decrescente.

b. Dimostrare che $\sup I = +\infty$ e che $y(t), y'(t)$ sono limitati nel futuro. (Fuga dai compatti).

c. Siano $\bar y\in\mathbb{R}^N$ e $r,\varepsilon,M>0$ tale che $\varepsilon\le\|\nabla F(x)\|\le M$ se $\|x-\bar y\|\le r$. Poniamo $\delta = r/(2M)$. Sia $t_0\ge 0$ tale che $\|y(t_0)-\bar y\|\le r/2$. Mostrare che $\|y(t)-\bar y\|\le r$ se $|t-t_0|\le\delta$, e infine che $F(t_0) - F(y(t_0+\delta)) \ge \varepsilon^2\delta$.

c. Mostrare che $\nabla F(y(t))\to 0$ per $t\to+\infty$.

Punti: 15, 5+10+10+15, 5+8+15+15.