Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2006/07

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Analisi Matematica 5

Prova Scritta del 12 settembre 2007

Cognome e Nome:

Matricola: Documento d'identità (se chiesto):

Tempo a disposizione: 3 ore.

1. Sia $f\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una funzione continua e limitata.

a. Per ogni $\lambda\in\mathbb{R}$ mostrare che esiste $y_\lambda\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ soluzione massimale di $y'_\lambda(t)=f(t,y_\lambda(t))+\lambda$, $y_\lambda(0)=0$, definita su tutto $\mathbb{R}$.

b. Mostrare che se $\lambda_1<\lambda_2$ allora $y_{\lambda_1}(t)<y_{\lambda_2}(t)$ per ogni $t>0$. Cosa succede se $t<0$? (Sopra e sottosoluzioni…)

c. Mostrare che i limiti $y_\pm(t):=\lim_{\lambda\to0^\pm}y_\lambda(t)$ esistono finiti per ogni $t\in\mathbb{R}$, e che i limiti sono uniformi se si restringe t a un limitato. (Per l'uniformità usare il teorema di Ascoli-Arzelà).

d. Mostrare che le funzioni y_+ e y_- sono soluzioni di $y'=f(t,y)$, $y(0)=0$. (Scrivere le equazioni in forma integrale e passare al limite, se si può).

e. Se $y(t)$ è una qualsiasi soluzione di $y'=f(t,y)$, $y(0)=0$, allora y è compresa fra y_- e y_+.

2. Consideriamo l'equazione differenziale $y'(t)=\dfrac{y(t)}{t}-\sqrt{|ty(t)|}$.

a. Mostrare che se $t\mapsto y(t)$ è una soluzione su I, allora $t\mapsto -y(-t)$ è soluzione su $-I$.

b. Dimostrare che c'è esistenza in grande per ogni problema di Cauchy $y(t_0)=y_0$ con $t_0\neq0$. Si riesce a dire qualcosa a priori sull'unicità?

c. Mostrare che le funzioni $t\mapsto t^3$ e $t\mapsto mt$ sono soprasoluzioni strette su $]0,+\infty[$ se $m\neq0$. Inoltre se $c>0$ la funzione costante $t\mapsto c$ sull'intervallo $]0,\sqrt[3]{c}[$ è sottosoluzione stretta, mentre su $]\sqrt[3]{c},+\infty[$ è una soprasoluzione stretta.

d. Sia $t\mapsto y(t)$ una soluzione definita per $t>0$. Mostrare che $y(t)$ è limitata superiormente; inoltre, se il grafico passa per il quarto quadrante (bordo escluso), allora $y(t)\to-\infty$ per $t\to+\infty$.

e. Risolvere esplicitamente l'equazione, per esempio con l'incognita ausiliaria $x(t)=y(t)/t$.

f. Ci sono dati iniziali per i quali l'equazione ha esistenza ma non unicità?

3. Sia $\varphi\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una funzione lipschitziana di costante $L>0$, cioè $|\varphi(x)-\varphi(y)|\le L\|x-y\|$ per ogni $x,y\in\mathbb{R}$.

a. Mostrare che se I è un intervallo, allora $\varphi(I)$ è pure un intervallo e $\mu(\varphi(I))\le L\mu(I)$.

b. Sia $E\subset\mathbb{R}$ un insieme trascurabile secondo Lebesgue. Dimostrare che $\varphi(E)$ è pure trascurabile. (Si può partire con un ricoprimento di E con intervalli I_n e vederne l'immagine tramite φ).

Punti: 5+5+10+10+5, 5+8+8+10+10+8, 7+10.