Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2006/07

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Analisi Matematica 5

Prova Scritta del 19 luglio 2007

Cognome e Nome:

Matricola: — Documento d'identità (se chiesto):

Tempo a disposizione: 3 ore.

1. Data l'equazione differenziale

$$y'(x) = \frac{3y(x)^2 - 6y(x) - x^2 + 2x + 2}{2\big(y(x) - 1\big)(x - 1)}$$

a. Discutere esistenza e unicità locale per i problemi di Cauchy associati.

b. Risolvere esplicitamente l'equazione.
(Il cambio di variabili $t = x - 1$, $u = y - 1$ conduce a un'equazione omogenea... Si può prendere come nuova funzione incognita per esempio $z(x) = (y(x) - 1)/(x - 1)$).

c. Disegnare un grafico qualitativo delle soluzioni nel piano (x, y).

d. Mostrare che $F(x, y) := ((y - 1)^2 - (x - 1)^2)/(x - 1)^3$ è una costante del moto, nel senso che $x \mapsto F(x, y(x))$ è costante su ciascuna soluzione.

2. Sia $\varphi\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ una funzione lipschitziana di costante $L > 0$, cioè $\|\varphi(x) - \varphi(y)\| \leq L\|x - y\|$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$. Sia $E \subset \mathbb{R}$ un insieme trascurabile secondo Lebesgue. Dimostrare che $\varphi(E)$ è pure trascurabile.
(Si può partire con $N = 1$ e un ricoprimento di E con intervalli I_n e vederne l'immagine tramite φ).

Punti: 5+12+10+6, 15.