Università degli Studi di Udine | Anno Accademico 2006/07

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Analisi Matematica 5

Prova Scritta del 12 aprile 2007

Cognome e Nome:

Matricola: Documento d'identità (se chiesto):

Tempo a disposizione: 3 ore.

1. Consideriamo l'equazione differenziale

$$x''(t) = -\frac{x(t)}{(1 + x(t)^2)^2}\,.$$

a. Per i problemi di Cauchy associati, discutere esistenza e unicità locale ed eventualmente in grande.

b. Trovare l'integrale primo dell'energia.

c. Disegnare qualitativamente le curve di livello dell'energia. Discutere di conseguenza monotonia, andamento all'infinito e periodicità delle soluzioni.

d. Trovare il problema di funzione implicita che è risolto dalla $x(t)$ tale che $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$.

2. Data l'equazione differenziale

$$x'(t) = (x - 1)\sqrt{|x(x - 1)|}$$

a. Discutere esistenza e unicità locale ed eventualmente in grande per i problemi di Cauchy associati.

b. Risolvere esplicitamente il problema di Cauchy con la condizione iniziale $x(0) = 0$.
(Il cambio di variabile $y = x/(x - 1)$ può aiutare a calcolare l'integrale. . .)

3. Sia $E \subset \mathbb{R}$ un insieme limitato.

a. Mostrare che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una successione di intervalli *aperti* I_n che ricoprono E e tali che $\sum_n \ell(I_n)$ differisce dalla misura esterna di Lebesgue di E meno di ε.

b. Supponiamo che E sia misurabile. Mostrare che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un aperto V tale che $E \subseteq V$ e la misura esterna di $V \setminus E$ sia minore di ε.

c. Supponiamo che E sia misurabile. Mostrare che se E è misurabile per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un aperto V e un chiuso F tale che $F \subseteq E \subseteq V$ e la misura esterna di $V \setminus F$ sia minore di ε.
(Applicare il punto precedente a $I \setminus E$, con I un intervallo chiuso contenente E. . .)

Punti: 4+5+10+10, 5+15, 6+6+8.