Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2006/07

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Analisi Matematica 5

Prova Scritta dell'11 gennaio 2007

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento d'identità (se chiesto):

Tempo a disposizione: 3 ore.

1. Consideriamo l'equazione differenziale scalare

$$y'(t) = \frac{4y^3}{2ty^2 - t^3}.$$

a. Discutere esistenza e unicità locale ed eventualmente in grande per il problema di Cauchy generico associato. Mostrare che se $y(t)$ è una soluzione, allora anche $-y(t)$, $y(-t)$ e $-y(-t)$ sono soluzioni.

b. Discutere in quali regioni del primo quadrante le funzioni costanti $u(t) \equiv c$ e le funzioni lineari $u(t) \equiv ct$ sono sopra o sottosoluzioni. Dedurne dei confronti con le soluzioni dell'equazione differenziale, ed eventualmente l'esistenza in grande nel futuro per certi dati iniziali. Lo stesso (più complicato) per le funzioni $u(t) \equiv ct^3$.

c. Risolvere esplicitamente l'equazione differenziale con condizioni iniziali generiche. (Osservare che il secondo membro è una funzione omogenea di grado 0 nella coppia $(t, y)\dots$).

d. Trovare una funzione non banale $E(t, y)$ tale che $t \mapsto E(t, y(t))$ sia costante se $y(t)$ è soluzione.

2. Sia E un sottinsieme di $\mathbb{R}$, e sia $2E$ il suo omotetico: $2E := \{2x \mid x \in E\}$.

a. Mostrare che la misura esterna di $2E$ è il doppio della misura esterna di E. (Mostrare che c'è una corrispondenza fra i ricoprimenti dei due insiemi).

b. Mostrare che se E è misurabile secondo Lebesgue, allora lo è anche $2E$.

Punti: 7+10+10+7, 10+7.