Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2006/07

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Analisi Matematica 5

Prova Scritta del 18 dicembre 2006

Cognome e Nome:

Matricola: Documento d'identità (se chiesto):

Tempo a disposizione: 3 ore.

1. Consideriamo il sistema di equazioni differenziali

$$x'(t) = f_1(x, y) = x(x + 2y - 1), \qquad y'(t) = f_2(x, y) = -y(2x + y - 1)\,.$$

a. Discutere esistenza e unicità locale ed eventualmente in grande. Mostrare che se $(x(t), y(t))$ è una soluzione, allora anche $(y(-t), x(-t))$ è soluzione. Trovare eventuali soluzioni costanti.

b. Trovare esplicitamente le eventuali soluzioni per le quali $x(t) \equiv 0$ oppure $y(t) \equiv 0$.

c. Mostrare che $\partial f_1/\partial x \equiv -\partial f_2/\partial y$, e che quindi la forma differenziale $f_1 dy - f_2 dx$ è esatta. Trovare di conseguenza una costante del moto del sistema.

d. Usando per esempio la costante del moto, mostrare che le soluzioni che partono dalla retta $x + y = 1$ ci rimangono sempre. Calcolare esplicitamente quella per la quale $x(0) = y(0) = 1/2$.

e. Mostrare che le soluzioni che partono da un punto del triangolo $x > 0$, $y > 0$, $x + y < 1$ ci rimangono sempre, sono definite per tutti i tempi, e sono periodiche.
(Nel triangolo gli insiemi di livello dell'integrale primo sono unioni di due grafici cartesiani che combaciano agli estremi. . .).

2. Consideriamo il problema di Cauchy in una dimensione $y'(t) = y(t)$, $y(0) = 1$.

a. Trovare esplicitamente un cilindro di sicurezza per il problema. Esistono cilindri di sicurezza con base $[-1, 1]$?

b. Posto $t_{i,n} = i/n$ per $i, n \in \mathbb{N}$, $n > 0$, consideriamo le poligonali di Eulero $y_n(0) = 1$, $y_n(t) = y_n(t_{i,n}) + y_n(t_{i,n})(t - t_{i,n})$ se $0 \le t_{i,n} < t \le t_{i+1,n}$. Mostrare che $y_n(t_{i,n}) = (1 + 1/n)^i$ per ogni $i, n \in \mathbb{N}$ e che di conseguenza $(1 + 1/n)^{nt} \le y_n(t) \le (1 + 1/n)^{nt+1}$ se $t \ge 0$.

c. Calcolare $\lim_{n\to+\infty} y_n(t)$ per $t \ge 0$ (puntualmente).

Punti: 7+10+7+10+15, 5+10+5.