Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2005/06

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Analisi Matematica 5

Prova Scritta dell'11 settembre 2006

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento d'identità (se chiesto):

Tempo a disposizione: 3 ore.

1. Consideriamo il seguente problema di Cauchy:

$$x'(t) = 2y(t)z(t), \quad y'(t) = x(t)z(t), \quad z'(t) = -x(t)y(t),$$
$$x(0) = 0, \quad y(0) = z(0) = 1/\sqrt{2}.$$

a. Discutere a priori esistenza e unicità locale ed eventualmente in grande.

b. Mostrare che $y^2 + z^2$ e $x^2 - y^2 + z^2$ sono costanti del moto.

c. Sia C l'insieme delle triple $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tali che $y = \sqrt{1+x^2}/\sqrt{2}$, $z = \pm\sqrt{1-x^2}/\sqrt{2}$, $-1 \leq x \leq 1$. Mostrare che C è un compatto, e che la traiettoria del problema di Cauchy è contenuta in C. Dedurne che il problema di Cauchy ha esistenza e unicità in grande.

d. Sia F la primitiva della funzione $u \mapsto 1/\sqrt{1-u^4}$ su $]-1, 1[$ tale che $F(0) = 0$. Mostrare che F è una funzione dispari e ha un prolungamento continuo su $[-1, 1]$. Posto $T := 2(F(1) - F(-1)) = 4F(1)$, mostrare che $x(t) := F^{-1}(t)$, $y(t) := \sqrt{1 + x(t)^2}/\sqrt{2}$, $z(t) := \sqrt{1 - x(t)^2}/\sqrt{2}$ è una soluzione del problema di Cauchy su $[-T/4, T/4]$.

e. Mostrare che la soluzione del problema di Cauchy è periodica di periodo T, e trovarne una formula risolutiva globale in termini di F.

2. Consideriamo la forma differenziale

$$\omega(x, y) := \frac{(1-y)dx + x\,dy}{x^2 + (y-1)^2} - \frac{-(y+1)dx + x\,dy}{x^2 + (y+1)^2} \,.$$

a. È una forma chiusa?

b. Calcolare l'integrale di ω sul cerchio di raggio 2 e centro l'origine, percorso in senso antiorario.

c. Se esiste, trovare una primitiva di ω sull'aperto ottenuto togliendo al piano $\mathbb{R}^2$ il segmento chiuso congiungente i due punti di singolarità.

Punti: 5+5+10+10+5, 5+5+10.