Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2003/04

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Analisi Matematica 5

Prova Scritta del 24 luglio 2006

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento d'identità (se chiesto):

Tempo a disposizione: 3 ore.

1. Consideriamo il seguente problema di Cauchy:

$$x'(t) = 2y(t)z(t), \quad y'(t) = x(t)z(t), \quad z'(t) = -x(t)y(t),$$
$$x(0) = 0, \quad y(0) = z(0) = 1/\sqrt{2}.$$

a. Discutere a priori esistenza e unicità locale ed eventualmente in grande.

b. Mostrare che $y^2 + z^2$ e $x^2 - y^2 + z^2$ sono costanti del moto.

c. Sia C l'insieme delle triple $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tali che $y = \sqrt{1+x^2}/\sqrt{2}$, $z = \pm\sqrt{1-x^2}/\sqrt{2}$, $-1 \le x \le 1$. Mostrare che C è un compatto, e che la traiettoria del problema di Cauchy è contenuta in C. Dedurne che il problema di Cauchy ha esistenza e unicità in grande.

d. Sia F la primitiva della funzione $u \mapsto 1/\sqrt{1-u^4}$ su $]-1, 1[$ tale che $F(0) = 0$. Mostrare che F è una funzione dispari e ha un prolungamento continuo su $[-1, 1]$. Posto $T := 2(F(1) - F(-1)) = 4F(1)$, mostrare che $x(t) := F^{-1}(t)$, $y(t) := \sqrt{1+x(t)^2}/\sqrt{2}$, $z(t) := \sqrt{1-x(t)^2}/\sqrt{2}$ è una soluzione del problema di Cauchy su $[-T/4, T/4]$.

e. Mostrare che la soluzione del problema di Cauchy è periodica di periodo T, e trovarne una formula risolutiva globale in termini di F.

2. Consideriamo il problema di Cauchy $y'(x) = \sqrt{|1 - y(x)^2|}$, $y(0) = 0$.

a. Discutere esistenza e unicità locale di soluzioni del problema.

b. Risolvere esplicitamente il problema cercando una soluzione tale che $-1 < y(x) < 1$. Per quali x è definita?

c. Esiste una soluzione $y(x)$ definita per ogni $x \in \mathbb{R}$ e tale che $-1 \le y(x) \le 1$ sempre?

d. Esistono soluzioni per le quali $y(x) > 1$ o $y(x) < -1$ per qualche x? Se sì trovarne esplicitamente qualcuna, o tutte.

Punti: 5+5+10+10+5, 5+8+10+10.

Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2005/06

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Analisi Matematica 6

Prova Scritta del 24 luglio 2006

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento d'identità (se chiesto):

Tempo a disposizione: 3 ore.

1. Sul cerchio unitario $\mathbb{U}$ di $\mathbb{C}$ consideriamo la classica base hilbertiana di $L^2(\mathbb{U})$ data da $u_n(z) := z^n$ per $n \in \mathbb{Z}$. Per $-\pi \leq x < \pi$ poniamo $F(e^{it}) := \min\{|x|, |x-\pi|, |x+\pi|\}$.

a. Mostrare che $F(z) = F(-z) = F(1/z)$ per ogni $z \in \mathbb{U}$. Dedurne che per i coefficienti di Fourier di F valgono le relazioni $\hat{F}(-n) = \hat{F}(n) = (-1)^n \hat{F}(n)$.

b. Calcolare i coefficienti di Fourier di F rispetto alla base $\{u_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

c. La serie di Fourier di F converge in L^2? Puntualmente? Uniformemente? A cosa?

d. Cosa dice l'identità di Bessel riguardo alla funzione F?

2. Per $f \in L^2(\mathbb{R})$ ed $x \in \mathbb{R}$ poniamo $(L_1 f)(x) := f(x) - f(-x)$, $(L_2 f)(x) := f(x) + f(-x)$.

a. Mostrare che L_1, L_2 sono ben definiti come operatori lineari continui da $L^2(\mathbb{R})$ in sé.

b. Mostrare che $\ker L_1$ (rispettivamente $\ker L_2$) è l'insieme delle funzioni pari (rispettivamente, dispari) a quadrato integrabile e coincide con l'immagine di L_2 (risp., di L_1).

c. Mostrare che $\ker L_1 = (\ker L_2)^\perp$. Quali sono le proiezioni ortogonali associate alla decomposizione in somma diretta?

Punti: 8+10+8+8, 5+5+10.