Università degli Studi di Udine Anno Accademico 2005/06

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Analisi Matematica 5

Prova Scritta dell'11 gennaio 2006

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento d'identità (se chiesto):

Tempo a disposizione: 3 ore.

1. Sia $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione continua e limitata, I un intervallo compatto contenente lo 0, $x_n \in \mathbb{R}$ una successione che converge a $\bar{x} \in \mathbb{R}$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia $y_n\colon I \to \mathbb{R}$ una soluzione del problema di Cauchy $y_n'(t) = f(t, y_n(t))$, $y(0) = x_n$.

a. Mostrare che la successione di funzioni y_n da I a $\mathbb{R}$ è equiuniformemente continua ed equilimitata.

b. Mostrare che esiste una sottosuccessione y_{n_k} che converge uniformemente su I a una funzione $\bar{y}\colon I \to \mathbb{R}$.
(Teorema di Ascoli-Arzelà).

c. Mostrare che la funzione $\bar{y}$ del punto precedente è una soluzione del problema di Cauchy $\bar{y}(t) = f(t, \bar{y}(t))$, $\bar{y}(0) = \bar{x}$.
(Passare al limite nell'uguaglianza $y_{n_k}(t) = x_{n_k} + \int_0^t f(s, y_{n_k}(s))ds$).

d. Supponiamo che il problema di Cauchy $y'(t) = f(t, y(t))$, $y(0) = \bar{x}$ abbia soluzione unica su I. Dimostrare che tale soluzione è il limite uniforme di tutta la successione y_n, non solo di una sottosuccessione.

2. Consideriamo le due curve piane $\gamma_0(t) := (-1 + 2\cos t, \operatorname{sen} 2t)$, $\gamma_1(t) := (\cos t, \operatorname{sen} t)$ per $t \in [0, 2\pi]$. Poniamo $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Infine definiamo $h(t, \lambda) := (\lambda - 1 + (2-\lambda)\cos t, (1-\lambda)\operatorname{sen} 2t + \lambda \operatorname{sen} t)$ per $(t, \lambda) \in [0, 2\pi] \times [0, 1]$.

a. Disegnare un grafico qualitativo delle due curve. Sono dei circuiti? Hanno valori in Ω?

b. Mostrare che $h_1(t, \lambda) \operatorname{sen} t - h_2(t, \lambda) \equiv (\lambda \cos t - 1) \operatorname{sen} t$. ($h_1, h_2$ sono le due componenti di h).

c. Mostrare che $h(t, \lambda) \in \Omega$ per ogni $(t, \lambda) \in [0, 2\pi] \times [0, 1]$.
(Sfruttare per esempio la formula del punto precedente).

d. Mostrare che h è un'omotopia fra i due circuiti γ_0 e γ_1, a valori in Ω.

e. Consideriamo la forma differenziale $\omega(x, y) := (-y\,dx + x\,dy)/(x^2 + y^2)$. La ω è definita su Ω? È chiusa? Calcolare l'integrale di ω lungo le due curve γ_0 e γ_1.

Punti: 6+6+8+6, 8+5+8+5+6.