Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Analisi Matematica 5

Prova Scritta del 7 dicembre 2005

Cognome e Nome:

Matricola: Documento d'identità (se chiesto):

Tempo a disposizione: 3 ore.

1. Consideriamo l'equazione differenziale $x''(t) = -x(t) + x(t)^2$.

a. Mostrare che $E(x, \dot{x}) := \frac{1}{2}\dot{x}^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2$ è una costante del moto.

b. Descrivere l'andamento qualitativo delle linee di livello di E. Dedurre in particolare che le soluzioni dell'equazione per le quali $E(x, \dot{x}) < E(1, 0)$ e $x < 1$ sono periodiche. (Disegnare prima il grafico di $x \mapsto \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2$).

c. Calcolare esplicitamente la soluzione con le condizioni iniziali critiche $x_0 = -1/2$, $\dot{x}_0 = 0$. (Per calcolare l'integrale usare il cambio di variabile $x = (y^2 - 1)/2$ ed evidenziare un quadrato perfetto sotto radice).

2. Poniamo $\gamma(t) := (0, 0)$ se $t \in [0, 2] \setminus \{1\}$ e $\gamma(1) := (1, 0)$, $f(t) \equiv 1$. Sia $\delta(t) > 0$ un calibro su $[0, 2]$.

a. Mostrare che esistono due suddivisioni Π_1, Π_2 con le seguenti proprietà: (i) sono adattate a δ; (ii) due intervallini consecutivi di Π_1 sono della forma $[a_{i-1}, 1]$ e $[1, a_{i+1}]$, entrambi con 1 come punto marcato; (iii) Π_2 ha esattamente $[a_{i-1}, a_{i+1}]$ come uno dei suoi intervallini, ancora con 1 come punto marcato.

b. Mostrare che per la somma di Riemann nel differenziale d'arco vale $S\ell(f, \gamma, \Pi_1) = 2$, $S\ell(f, \gamma, \Pi_2) = 0$.

c. Mostrare che f non è integrabile lungo γ nel differenziale d'arco.

3. Consideriamo la curva piana $\gamma(t) := (t \cos \log t, t \operatorname{sen} \log t)$ se $0 < t \leq 1$, $\gamma(0) := (0, 0)$.

a. Disegnare un grafico qualitativo della curva. (Può convenire passare in coordinate polari).

b. La curva è continua? È derivabile? È rettificabile? Calcolarne la lunghezza.

Punti: 4+12+12, 10+8+8, 8+8.