Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2004/05

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Analisi Matematica 5

Prova Scritta del 5 settembre 2005

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento d'identità (se chiesto):

Tempo a disposizione: 3 ore.

1. (Anno accademico 2003/04) Consideriamo il problema di Cauchy $y'(x) = \sqrt{|1 - y(x)^2|}$, $y(0) = 0$.

a. Discutere esistenza e unicità locale di soluzioni del problema.

b. Risolvere esplicitamente il problema cercando una soluzione tale che $-1 < y(x) < 1$. Per quali x è definita?

c. Esiste una soluzione $y(x)$ definita per ogni $x \in \mathbb{R}$ e tale che $-1 \leq y(x) \leq 1$ sempre?

d. Esistono soluzioni per le quali $y(x) > 1$ o $y(x) < 1$ per qualche x? Se sì trovarne esplicitamente qualcuna, o tutte.

2. Diremo che una suddivisione marcata Π di $[-1, 1]$ è simmetrica se ogniqualvolta $[a', a'']$ è un intervallino di Π con punto marcato x', allora anche $[-a'', -a']$ è intervallino di Π con punto marcato $-x'$.

a. Sia $\delta\colon [-1, 1] \to]0, +\infty[$ un calibro. Dimostrare che esiste una suddivisione marcata Π di $[-1, 1]$ che è simmetrica ed adattata a δ.
(Prendere una suddivisione di $[0, 1]$ adattata a $\min\{\delta(x), \delta(-x)\}$ e concatenarla con la speculare...)

b. Sia $f\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile secondo Henstock-Kurzweil e dispari ($f(-x) = -f(x)$). Dimostrare (per via elementare) che f ha integrale nullo su $[-1, 1]$.

3. Sul quadrato $I := [0, 1] \times [0, 1]$ si consideri la funzione $f(x, y) := \dfrac{x - 2y}{x + 2y}$ per $(x, y) \in I \setminus \{(0, 0)\}$, $f(0, 0) := 0$.

a. f è continua su I? È positiva? È limitata?

b. Calcolare gli integrali iterati $\int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y)dy$ e $\int_0^1 dy \int_0^1 f(x, y)dx$, se hanno senso.

c. Consideriamo la funzione su I definita da $F(x, y) := (1/2)(x^2 - 4y^2)\log(x + 2y)$ per $(x, y) \in I \setminus \{(0, 0)\}$ e $F(0, 0) := 0$. Mostrare che fuori dall'origine $\partial^2 F/(\partial x \partial y) = f$ e che F è continua su tutto I

d. f è integrabile su I?

Punti: 4+8+8+10, 10+10, 8+10+8+8.