Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2004/05

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Analisi Matematica 5

Prova Scritta del 30 marzo 2005

Cognome e Nome:

Matricola: Documento d'identità (se chiesto):

Tempo a disposizione: 3 ore.

1. Siano $[a,b]$ un intervallo compatto e $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione. Data una suddivisione marcata Π di $[a,b]$ con punti di suddivisione $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = b$ e punti marcati $a_{i-1} \le x_i \le a_i$, definiamo $V(f,\Pi) := \sum_{k=1}^{n} |f(a_k) - f(a_{k-1})|$, e sia $V(f)$ l'estremo superiore dei numeri $V(f,\Pi)$ al variare di tutte le possibili suddivisioni Π. $V(f)$ è detta la *variazione totale di* f. Col simbolo $S(f,\Pi)$ indicheremo la consueta somma di Riemann di f. Supponiamo infine che f sia derivabile in ogni punto di $[a,b]$, e sia $\varepsilon > 0$.

a. Se i punti di suddivisione di Π sono anche di suddivisione di Π' allora $V(f,\Pi) \le V(f,\Pi')$.

b. Mostrare che per ogni $x \in [a,b]$ esiste $\delta(x) > 0$ tale che se $\Pi \prec \delta$ allora per ogni i

$$\left| \left| \frac{f(a_i) - f(a_{i-1})}{a_i - a_{i-1}} \right| - |f'(x_i)| \right| < \varepsilon \,.$$

(Usare la disuguaglianza $\big||x| - |y|\big| \le |x - y|$ e quanto noto sulla derivata).

c. Se Π è adattata al calibro δ del punto precedente, allora

$$\big|S(|f'|,\Pi) - V(f,\Pi)\big| \le \varepsilon(b-a)\,.$$

d. Per ogni suddivisione Π e per ogni calibro $\bar\delta\colon [a,b] \to \,]0,+\infty[$ esiste una suddivisione Π' adattata a $\bar\delta$ tale che $V(f,\Pi) \le V(f,\Pi') \le S(|f'|,\Pi') + \varepsilon(b-a)$. Dedurre che se $V(f) = +\infty$ allora $|f'|$ non è integrabile.
(In ogni intervallino di Π prendere una suddivisione $\prec \min\{\delta, \bar\delta\}$ e concatenare...)

e. Supponiamo che $V(f) < +\infty$. Sia Π_ε tale che $V(f,\Pi_\varepsilon) > V(f) - \varepsilon$. Costruire un calibro $\delta' \le \delta$ tale che se $\Pi \prec \delta'$ allora i punti di suddivisione di Π_ε siano tutti punti marcati di Π. Mostrare che se $\Pi \prec \delta'$ allora

$$\big|S(|f'|,\Pi) - V(f)\big| \le \varepsilon(1+b-a)\,.$$

Concludere che $|f'|$ è integrabile e $\int_a^b |f'| = V(f)$.

2. Consideriamo $I := [0,1] \times [0,1]$ e la funzione $f(x,y) := (x^2+xy)/(x^2+y^2)$ per $(x,y) \in I \setminus \{(0,0)\}$, $f(0,0) := 0$.

a. f è continua su I? È positiva? È limitata?

b. Calcolare gli integrali iterati $\int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y)dy$ e $\int_0^1 dy \int_0^1 f(x,y)dx$, se hanno senso.

c. f è integrabile su I?

Punti: 5+8+8+12+15, 8+12+10.