Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2004/05

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Analisi Matematica 5

Prova Scritta del 5 gennaio 2005

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento d'identità (se chiesto):

Tempo a disposizione: 3 ore.

1. Siano $[a,b]$ un intervallo compatto, E un suo sottinsieme trascurabile secondo Lebesgue, $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata. Supponiamo che per ogni $x \in [a,b] \setminus E$ la f sia continua nel punto x. Per $n \in \mathbb{N}$ e $0 \le i \le n$ sia $a_{n,i} := a + (b-a)i/n$, e definiamo $f_n\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ come $f_n(x) := f(a_{n,i})$ se $a_{n,i} \le x < a_{n,i+1}$, $f_n(b) := f(b)$.

a. Mostrare che ognuna delle f_n è integrabile su $[a,b]$, e che esiste $M \ge 0$ tale che $|f_n(x)| \le M$ per ogni n, x.

b. Dimostrare che se $x \in [a,b] \setminus E$ allora $f_n(x) \to f(x)$ per $n \to +\infty$.

c. Dimostrare che f è integrabile su $[a,b]$ e che $\int_a^b f_n \to \int_a^b f$ per $n \to +\infty$.
(Convergenza dominata).

2. Consideriamo $I := [0,1] \times [0,1]$ e la funzione $f(x,y) := (x-y)/(x+y)^3$ per $(x,y) \in I \setminus \{(0,0)\}$, $f(0,0) := 0$.

a. f è continua su I? È positiva? È limitata?

b. Sia $g\colon I \to \mathbb{R}$ integrabile secondo Lebesgue, e tale che $g(x,y) = -g(y,x)$ per ogni $(x,y) \in I$. Mostrare che $\int_I g = 0$. Questo risultato ha conseguenze per la nostra f?
(Usare il teorema di cambio di variabile con $\varphi(x,y) := (y,x)$).

c. Calcolare gli integrali iterati $\int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y)dy$ e $\int_0^1 dy \int_0^1 f(x,y)dx$, se hanno senso. La f è integrabile su I?

3. Calcolare il $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_{[0,1]\times[0,1]} \left(1 + \frac{x-3y}{n}\right)^n dx\, dy.$

Punti: 5+10+8, 5+10+8, 15.