Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2003/04

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Analisi Matematica 5

Prova Scritta del 9 dicembre 2004

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento d'identità (se chiesto):

Tempo a disposizione: 3 ore.

1. Poniamo $f(t,y) := (y+t)^2 - 1$ e consideriamo il problema di Cauchy $y'(t) = f(t, y(t))$, $y(0) = 0$ e la successione di funzioni $y_0(t) := 0$, $y_{n+1}(t) := \int_0^t f(r, y_n(r))dr$.

a. Dimostrare che l'unica soluzione del problema di Cauchy è $\bar{y}(t) = -t$.

b. Dimostrare che le funzioni y_n sono polinomi della forma $y_n(t) = -t + t^{a_n}/b_n$, dove $a_n = 2^{n+1} - 1$, $b_0 = 1$, $b_n = b_{n-1}^2 a_n$.

c. Dimostrare che per ogni $n \geq 1$ vale la disuguaglianza

$$\frac{5+\log_2 3}{3}2^n - n - 3 + \frac{2-\log_2 3}{3\cdot 2^{n-1}} \leq \log_2 b_n \leq \Big(2 + \frac{\log_2 3}{2} - \frac{\log_2 e}{24}\Big)2^n - n - 3 + \frac{\log_2 e}{3\cdot 2^{n+1}}\,.$$

(Per il passo induttivo, scrivere $\log_2 b_n = 2\log_2 b_{n-1} + \log_2 a_n$; si può valutare $\log_2 a_n$ usando il fatto che la funzione $x \mapsto \log_2(1+x)$ è concava, e quindi vale la relazione $x\log_2(1-\varepsilon)/(-\varepsilon) \leq \log_2(1+x) \leq x\log_2 e$, se $-\varepsilon \leq x \leq 0$, applicandola con $x = -1/2^{n+1}$)

d. Dimostrare che per $n \to +\infty$ la successione $y_n(t)$ tende a $\bar{y}(t)$ se $0 \leq t < 2^{5/6}3^{1/3}$ mentre tende a $+\infty$ se $t \geq 2\cdot 3^{1/4}e^{-1/48}$.

2. Consideriamo il problema di Cauchy $y'(x) = e^{y(x)} - e^x$, $y(0) = 0$.

a. Discutere esistenza e unicità locale.

b. Dimostrare che la soluzione $y(x)$ è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$, che $x < y(x) < 0$ per $x < 0$ e $1 - e^x < y(x) < 0$ per $x > 0$.
(Teorema del confronto).

c. Dimostrare che $y(x)$ è crescente per $x \leq 0$, decrescente per $x \geq 0$, e che $y(x) \to -\infty$ per $x \to \pm\infty$.

d. Risolvere esplicitamente il problema.
(Moltiplicare $y' + e^x = e^y$ per $e^{y+e^x}\ldots$).

Punti: 5+8+20+10, 5+8+5+10.