Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2004/05

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Analisi Matematica 5

Prova Scritta del 9 dicembre 2004

Cognome e Nome:

Matricola: Documento d'identità (se chiesto):

Tempo a disposizione: 3 ore.

1. Siano $[a,b]$ un intervallo compatto, E un suo sottinsieme trascurabile secondo Lebesgue, $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione nulla al di fuori di E, ed $\varepsilon > 0$.

a. Mostrare che per ogni $n \geq 1$ esiste un calibro $\delta_n\colon [a,b] \to]0,+\infty[$ tale che per ogni suddivisione Π di $[a,b]$, se Π è adattata a δ_n allora $0 \leq S(\chi_E, \Pi) < \varepsilon/(n2^n)$.

b. Per $x \in [a,b]$ sia $n(x) \in \mathbb{N}$ tale che $n(x) - 1 \leq |f(x)| < n(x)$, e poniamo $\delta(x) = \delta_{n(x)}(x)$. Questo δ è un calibro ben definito su $[a,b]$.

c. Sia Π una suddivisione di $[a,b]$ adattata al calibro δ definito nel punto precedente. Siano $x_1, x_2, \dots, x_m$ i punti marcati di Π, e sia $B := \{n(x_1), n(x_2), \dots, n(x_m)\}$. Per $k \in B$ sia Π_k la sottosuddivisione di Π formata di quegli intervallini di Π per i quali $n(x_i) = k$. Allora esiste una suddivisione Π_k' di tutto $[a,b]$ adattata a δ_k e tale che Π_k è sottosuddivisione anche di Π_k'.
(Sulle parti di $[a,b]$ non coperte da Π_k applicare il teorema di Cousin con δ_k, e concatenare i risultati).

d. Con Π come nel punto precedente, mostrare che

$$|S(f,\Pi)| \leq \sum_{k\in B} kS(\chi_E, \Pi_k) \leq \sum_{k \in B} kS(\chi_E, \Pi_k') < \varepsilon\,.$$

e. Dedurre infine che f è integrabile secondo Henstock-Kurzweil, con integrale nullo.

2. Consideriamo $I := [0,1] \times [0,1]$ e la funzione $f(x,y) := (2x-y)/(x+y)$ per $(x,y) \in I \setminus \{(0,0)\}$, $f(0,0) := 0$.

a. f è continua su I? È positiva? È limitata?

b. Calcolare gli integrali iterati $\int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y)dy$ e $\int_0^1 dy \int_0^1 f(x,y)dx$, se hanno senso.

c. f è integrabile su I?

3. Calcolare il $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \left(1 + \frac{2x}{n}\right)^n dx$.

Punti: 5+5+8+10+5, 8+8+8, 12.

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Analisi Matematica 5

Prova Scritta del 9 dicembre 2004

Svolgimento

1. a. Dire che E è trascurabile secondo Lebesgue significa che la sua funzione caratteristica

$$\chi_E(x) := \begin{cases} 1 & \text{se } x \in E, \\ 0 & \text{se } x \in [a,b] \setminus E \end{cases}$$

è integrabile con integrale nullo. Dunque, per definizione di integrabilità, dato $\varepsilon > 0$ ed $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ esiste un calibro $\delta_n \colon [a,b] \to]0,+\infty[$ tale che per ogni suddivisione Π di $[a,b]$ si ha

$$\Pi \prec \delta_n \quad \Rightarrow \quad \big|S(\chi_E,\Pi) - 0\big| < \frac{\varepsilon}{n2^n}\,.$$

Poiché $\chi_E \geq 0$, e quindi $S(\chi_E,\Pi) \geq 0$, il valore assoluto si può togliere:

$$\Pi \prec \delta_n \quad \Rightarrow \quad 0 \leq S(\chi_E,\Pi) < \frac{\varepsilon}{n2^n}\,.$$

b. Per $x \in [a,b]$ esiste un (unico) intero $n(x)$ tale che $n(x) - 1 \leq |f(x)| < n(x)$. Volendo, in termini di parte intera si ha $n(x) := \lfloor f(x) \rfloor + 1$. Poiché $0 \leq |f(x)| < n(x)$, per x fissato $n(x)$ è un intero strettamente positivo, e quindi ha senso prendere il calibro $\delta_{n(x)}$ e calcolarlo in x, e il risultato $\delta_{n(x)}(x)$ è > 0, perché $\delta_{n(x)}(t) > 0$ per ogni t. Quindi $\delta(x) := \delta_{n(x)}(x)$ è un calibro ben definito su $[a,b]$.

c. Sia Π una suddivisione di $[a,b]$ adattata al calibro δ definito nel punto precedente. Siano $a_0 < a_1 < \ldots < a_m$ i punti di suddivisione e $x_1, x_2, \ldots, x_m$ i punti marcati di Π. Per definizione di adattamento

$$[a_{i-1},a_i] \subseteq [x_i - \delta(x_i), x_i + \delta(x_i)] = [x_i - \delta_{n(x_i)}(x_i), x_i + \delta_{n(x_i)}(x_i)] \qquad \forall i = 1,\ldots,m.$$

Sia $B := \{n(x_1), n(x_2), \ldots, n(x_m)\}$, e per $k \in B$ sia Π_k la sottosuddivisione di Π formata dagli intervallini per i quali $n(x_i) = k$. Se $[a_{i-1},a_i], x_i$ è un intervallino di Π_k, abbiamo che

$$[a_{i-1},a_i] \subseteq [x_i - \delta(x_i), x_i + \delta(x_i)] = [x_i - \delta_{n(x_i)}(x_i), x_i + \delta_{n(x_i)}(x_i)] = [x_i - \delta_k(x_i), x_i + \delta_k(x_i)].$$

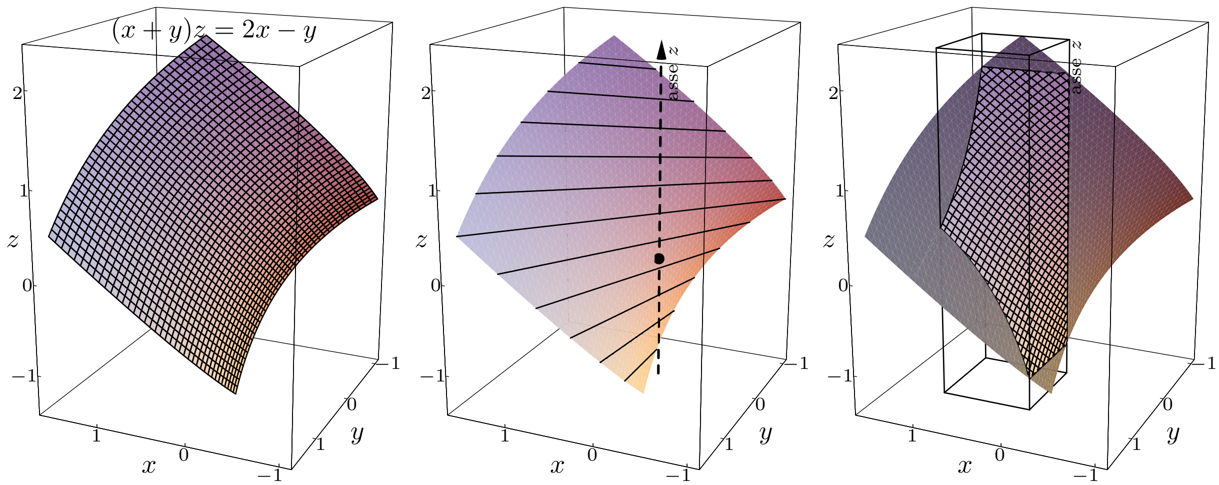
Quindi Π_k è adattata a δ_k. La parte di $[a,b]$ eventualmente non coperta dagli intervallini di Π_k è formata da un numero finito di intervalli. Sulla chiusura di ciascuno di questi per il teorema di Cousin esiste una suddivisione adattata a δ_k. Concatenando queste suddivisioni con la Π_k otteniamo una suddivisione Π'_k di tutto $[a,b]$ adattata a δ_k e di cui Π_k è ovviamente sottosuddivisione.

d. Raggruppiamo la somma di Riemann a seconda del valore di $n(x_i)$, e teniamo conto del fatto che $f(x_i) = f(x_i)\chi_E(x_i)$, poiché f è nulla fuori da E, e che per definizione $|f(x_i)| \leq k$ quando $n(x_i) = k$:

$$\begin{aligned}
|S(f,\Pi) - 0| &= \left|\sum_{i=1}^m f(x_i)(a_i - a_{i-1})\right| = \left|\sum_{i=1}^m f(x_i)\chi_E(x_i)(a_i - a_{i-1})\right| = \\
&= \left|\sum_{k\in B}\sum_{\{i|n(x_i)=k\}} f(x_i)\chi_E(x_i)(a_i - a_{i-1})\right| \leq \sum_{k\in B}\sum_{\{i|n(x_i)=k\}} \big|f(x_i)\chi_E(x_i)\big|(a_i - a_{i-1}) \leq \\
&\leq \sum_{k\in B}\sum_{\{i|n(x_i)=k\}} k\chi_E(x_i)(a_i - a_{i-1}) = \sum_{k\in B} kS(\chi_E,\Pi_k) \leq \sum_{k\in B} kS(\chi_E,\Pi'_k) \leq \\
&\leq \sum_{k\in B} k\frac{\varepsilon}{k2^k} = \sum_{k\in B}\frac{\varepsilon}{2^k} < \sum_{k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}\frac{\varepsilon}{2^m} = \varepsilon\,.
\end{aligned}$$

Abbiamo anche usato il fatto che gli addendi di $S(\chi_E,\Pi_k)$ sono pure addendi di $S(\chi_E,\Pi'_k)$, e che tutti gli addendi di quest'ultima sono ≥ 0, per cui $S(\chi_E,\Pi_k) \leq S(\chi_E,\Pi'_k)$.

e. Dato un $\varepsilon > 0$ abbiamo esibito un calibro $\delta(x) > 0$ tale che per ogni suddivisione Π di $[a, b]$ adattata a δ si ha che $|S(f, \Pi) - 0| < \varepsilon$. Per definizione di integrale secondo Henstock-Kurzweil la funzione f è integrabile con integrale nullo. Il fatto che una funzione quasi ovunque nulla ha integrale nullo è ben noto, ma di solito la dimostrazione si appoggia a una lunga catena di teoremi. Qui abbiamo voluto allacciarlo direttamente alla definizione basilare in termini di calibri.



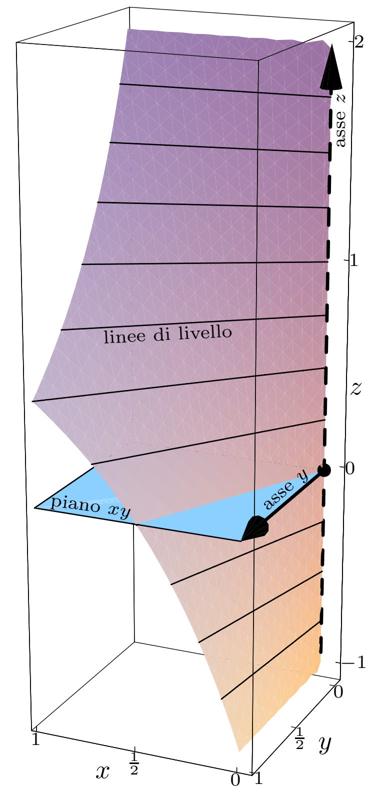
2. a. La quadrica $(x + y)z = 2x - y$, che è un iperboloide a una falda (figura qui sopra a sinistra), che contiene l'asse z e le cui intersezioni coi piani orizzontali $z = c$ sono rette (figura sopra al centro). Il grafico di f su $I \setminus \{(0, 0)\}$ si ottiene intersecando l'iperboloide col cilindro a base quadrata $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$ e togliendo l'asse z (figura sopra a destra). Fuori dall'origine la f è il rapporto di due polinomi, e quindi è di classe C^∞ in ogni punto in cui non si annulla il denominatore. Il denominatore $x + y$ si annulla per $y = -x$, cioè sulla bisettrice del secondo e terzo quadrante. Tale bisettrice incontra il rettangolo I solo nell'origine. Quindi f è continua, anzi, è C^∞ su $I \setminus \{(0, 0)\}$. La f non è continua nell'origine, in quanto per esempio avvicinandoci a $(0, 0)$ lungo l'asse x

$$\lim_{x\to 0^+} f(x, 0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{2x - 0}{x + 0} = \lim_{x\to 0^+} 2 = 2 \ne 0 = f(0, 0)\,.$$

La funzione (pensata anche fuori da I) è peraltro omogenea di grado zero:

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{2\lambda x - \lambda y}{\lambda x + \lambda y} = \frac{\lambda(2x - y)}{\lambda(x + y)} = \frac{2x - y}{x + y} = \\ = f(x, y) \qquad \forall (x, y) \ne (0, 0) \quad \forall \lambda \ne 0\,,$$

(figura qui a fianco a destra) e quindi avrebbe limite nell'origine soltanto se fosse costante. Ma costante non è, ovviamente.
Poiché su $I \setminus \{(0, 0)\}$ il denominatore $x + y$ è > 0, il segno di $f(x, y)$ coincide col segno di $2x - y$. Quindi $f(x, y)$ è > 0 al di sotto della retta $y = 2x$ ed è < 0 al di sopra. Su I la f cambia segno.



Qualora considerata su tutto il piano esclusa la bisettrice del secondo e quarto quadrante, la funzione $(x, y) \mapsto (2x - y)/(x + y)$ non è limitata, perché diverge nei punti della bisettrice esclusa l'origine. Questo però non esclude che possa essere limitata se ristretta su $I \setminus \{(0, 0)\}$. Visto che f è omogenea si presta a essere studiata in coordinate polari:

$$f(r\cos\theta, r \operatorname{sen}\theta) = \frac{2r\cos\theta - r\operatorname{sen}\theta}{r\cos\theta + r\operatorname{sen}\theta} = \frac{2\cos\theta - \operatorname{sen}\theta}{\cos\theta + \operatorname{sen}\theta}\,.$$

Poniamo

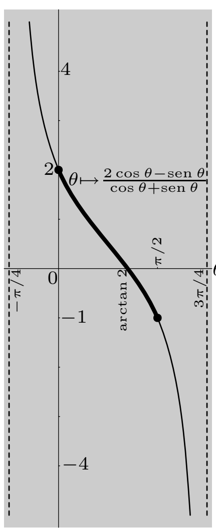
$$g(\theta) := \frac{2\cos\theta - \operatorname{sen}\theta}{\cos\theta + \operatorname{sen}\theta}\,.$$

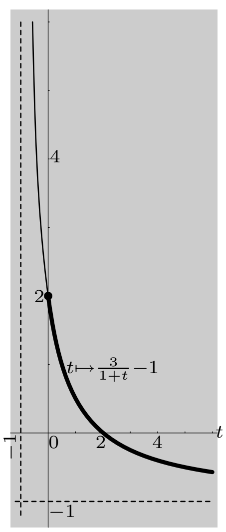
Questa g diverge nei punti del tipo $\pi/4 + k\pi$ al variare di $k \in \mathbb{Z}$, cioè dove si annulla $\cos\theta + \operatorname{sen}\theta$, ed è continua altrove. Origine esclusa, i punti del primo quadrante, e quindi di I, corrispondono a $0 \le \theta \le \pi/2$, dove la g è continua, e quindi limitata. Pertanto anche la f è limitata su $I \setminus \{(0,0)\}$:

$$\sup_{I\setminus\{(0,0)\}} |f| = \sup_{0\le\theta\le\pi/2} |g(\theta)| < +\infty\,.$$

Per chi lo voglia non è difficile trovare esplicitamente gli estremi di g: basta calcolare la derivata

$$\begin{aligned}
g'(\theta) &= \frac{(-2\operatorname{sen}\theta - \cos\theta)(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta) - (2\cos\theta - \operatorname{sen}\theta)(-\operatorname{sen}\theta + \cos\theta)}{(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta)^2} = \\
&= \frac{-2\operatorname{sen}\theta\cos\theta - 2\operatorname{sen}^2\theta - \cos^2\theta - \operatorname{sen}\theta\cos\theta + 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta - 2\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta + \operatorname{sen}\theta\cos\theta}{(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta)^2} = \\
&= \frac{-3}{(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta)^2}\,.
\end{aligned}$$





Evidentemente $g'(\theta) < 0$. Dunque gli estremi di g su $[0, \pi/2]$ sono $g(0) = 2$ e $g(\pi/2) = -1$, che sono pure gli estremi di f su $I \setminus \{(0,0)\}$. Poiché $f(0,0) = 0$ concludiamo che $-1 \le f(x,y) \le 2$ per ogni $(x,y) \in I$.
Invece che con le coordinate polari, si poteva anche per esempio riportare alla variabile y/x, per $x \ne 0$:

$$f(x,y) = \frac{2x - y}{x + y} = \frac{2 - \frac{y}{x}}{1 + \frac{y}{x}} = h\Big(\frac{y}{x}\Big) \qquad \text{per } x \ne 0\,,$$

dove abbiamo posto

$$h(t) := \frac{2 - t}{1 + t} = \frac{3}{1 + t} - 1\,.$$

Su I, escluso l'asse y, la $t = y/x$ varia da 0 a $+\infty$. La funzione $h(t)$ è continua in $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ e tende a 0 per $t \to \pm\infty$. Quindi h è limitata su $[1, +\infty[$. Deduciamo che

$$\sup_{\substack{(x,y)\in I\\ x\ne 0}} \big|f(x,y)\big| = \sup_{t\ge 0}\big|h(t)\big| < +\infty\,.$$

Volendo si può anche notare che h è decrescente su $[0, +\infty[$, e quindi è compresa fra $h(0) = 2$ e $h(+\infty) = -1$. Infine, la f è chiaramente limitata sull'asse y. Quindi è limitata su tutto I.

b. L'integrale parziale $\int_0^1 f(x,y)dx$ per $y \ne 0$ ha senso perché integrale di una funzione continua su un intervallo compatto. Per $y = 0$ la $f(x,0)$ vale 0 per $x = 0$ e vale -1 per $x \ne 0$. Pertanto anche $x \mapsto f(x,0)$ è integrabile, perché uguale quasi ovunque a una costante. Calcoliamo una primitiva di $x \mapsto f(x,y)$ per $y \ne 0$:

$$\int \frac{2x - y}{x + y}dx = \int \frac{2x + 2y - 3y}{x + y}dx = \int \Big(2 - \frac{3y}{x + y}\Big)dx = 2x - 3y\int \frac{1}{x + y}dx = 2x - 3y\log|x + y|\,.$$

Pertanto

$$\int_0^1 f(x,y)dx = \Big[2x - 3y\log(x + y)\Big]_{x=0}^1 = 2 - 3y\log(1 + y) + 3y\log y \qquad \text{se } y > 0\,.$$

Per $y = 0$ questa formula non ha senso, perché non è definito il logaritmo di 0. Al fine del calcolo di $\int_0^1 dy \int_0^1 f(x,y)dx$, cosa succeda per $y = 0$ è irrilevante, perché $\{0\}$ è un insieme di misura nulla in $[0,1]$. Comunque per scrupolo studiamo anche il caso $y = 0$. Si ha

$$f(0,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0, \\ \frac{2x-0}{x+0} = 2 & \text{se } x \neq 0. \end{cases}$$

La funzione $f(x,0)$ è quasi ovunque uguale alla costante 2, e quindi è integrabile su $[0,1]$ e $\int_0^1 f(x,0)dx = 2$. Si dà anche il caso che

$$\lim_{y\to 0^+} \int_0^1 f(x,y)dx = \lim_{y\to 0^+}\Big(2 - 3y\log(1+y) + 3y\log y\Big) = 2 - 3\cdot 0 \cdot 0 + 3 \lim_{y\to 0^+} \frac{\log y}{1/y} \overset{\substack{\infty/\infty \\ \text{L'Hôpital}}}{=}$$
$$= 2 - \lim_{y\to 0^+} \frac{1/y}{-1/y^2} = 2 = \int_0^1 f(x,0)dx\,.$$

Se interpretata opportunamente, la formula

$$\int_0^1 f(x,y)dx = 2 - 3y\log(1+y) + 3y\log y$$

risulta quindi valida non solo per $y > 0$ ma anche per $y = 0$, e risulta una funzione continua di y per $y \geq 0$, e pertanto ha senso l'integrale iterato $\int_0^1 dy \int_0^1 f(x,y)dx$. Per calcolarlo troviamo delle primitive di $y \mapsto y\log(1+y)$ e di $y \mapsto y\log y$, per esempio col metodo per parti:

$$\begin{aligned}
\int y\log(1+y)dy &= \frac{y^2}{2}\log(1+y) - \int \frac{y^2}{2}\cdot\frac{1}{1+y}dy = \frac{y^2}{2}\log(1+y) - \frac{1}{2}\int\frac{y^2}{1+y}dy = \\
&= \frac{y^2}{2}\log(1+y) - \frac{1}{2}\int\frac{y^2-1+1}{1+y}dy = \frac{y^2}{2}\log(1+y) - \frac{1}{2}\int\Big(y+1+\frac{1}{1+y}\Big)dy = \\
&= \frac{y^2}{2}\log(1+y) - \frac{1}{2}\Big(\frac{y^2}{2} + y + \log(1+y)\Big) = \frac{y^2}{2}\log(1+y) - \frac{y^2}{4} - \frac{y}{2} - \frac{1}{2}\log(1+y) = \\
&= \frac{y^2-1}{2}\log(1+y) - \frac{y^2-2y}{4}\,, \\
\int y\log y\,dy &= \frac{y^2}{2}\log y - \int\frac{y^2}{2}\cdot\frac{1}{y}dy = \frac{y^2}{2}\log y - \int\frac{y}{2}dy = \frac{y^2}{2}\log y - \frac{y^2}{4}\,.
\end{aligned}$$

Pertanto

$$\int\Big(2 - 3y\log(1+y) + 3y\log y\Big)dy = 2y - 3\Big(\frac{y^2-1}{2}\log(1+y) - \frac{y^2-2y}{4}\Big) + 3\Big(\frac{y^2}{2}\log y - \frac{y^2}{4}\Big) =$$
$$= \frac{1}{2}\Big(y + 3y^2\log y - 3(y^2-1)\log(1+y)\Big)\,.$$

Questa espressione ha limite finito (anzi, nullo) per $y \to 0^+$, come c'era da aspettarsi, essendo primitiva di una funzione continua per $y \geq 0$. In definitiva

$$\int_0^1 dy \int_0^1 f(x,y)dx = \frac{1}{2}\Big[y + 3y^2\log y - 3(y^2-1)\log(1+y)\Big]_0^1 = \frac{1}{2}(1-0) = \frac{1}{2}\,.$$

Per il calcolo dell'altro integrale iterato i conti sono molto simili; nel caso $x = 0$ alcune formule seguenti vanno interpretate come limiti per $x \to 0^+$:

$$\int \frac{2x-y}{x+y}dy = \int \frac{3x-(x+y)}{x+y}dy = \int \Big(\frac{3x}{x+y} - 1\Big)dy =$$
$$= -y + 3x \int \frac{1}{x+y}dy = -y + 3x\log|x+y|\,,$$
$$\int_0^1 f(x,y)dy = \begin{cases} -1 + 3x\log(1+x) - 3x\log x & \text{se } x > 0,\\ -1 & \text{se } x = 0,\end{cases}$$
$$\int dx \int_0^1 f(x,y)dy = \int \Big(-1 + 3x\log(1+x) - 3x\log x\Big)dx =$$
$$= -x + 3\Big(\frac{x^2-1}{2}\log(1+x) - \frac{x^2-2x}{4}\Big) - 3\Big(\frac{x^2}{2}\log x - \frac{x^2}{4}\Big) =$$
$$= \frac{1}{2}\Big(x + 3(x^2-1)\log(1+x) - 3x^2\log x\Big)\,,$$
$$\int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y)dy = \frac{1}{2}\Big[x + 3(x^2-1)\log(1+x) - 3x^2\log x\Big]_0^1 = \frac{1}{2}(1-0) = \frac{1}{2}\,.$$

I due integrali iterati $\int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y)dy$ e $\int_0^1 dy \int_0^1 f(x,y)dx$ hanno entrambi senso e hanno lo stesso valore $1/2$. Questo non garantisce di per sé che la funzione f sia integrabile su I.

c. Un teorema (non svolto a lezione) dice che se una funzione definita su un rettangolo è limitata e l'insieme dei suoi punti di discontinuità è trascurabile, allora la funzione è integrabile. Questo risultato si applica alla nostra f, perché abbiamo visto che è limitata, e che l'insieme dei punti di discontinuità contiene un singolo punto, l'origine.
Dovendo rifarsi alla teoria svolta durante il corso, un modo di dimostrare che f è integrabile è di trovarne una sua primitiva seconda mista e di studiarne la continuità:

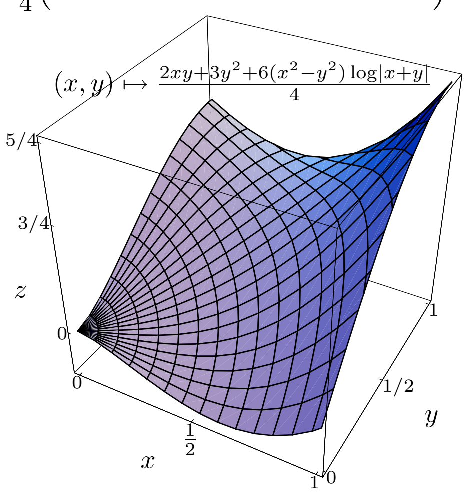
$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{2x-y}{x+y}\,, \qquad \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \int \frac{2x-y}{x+y}dx = 2x - 3y\log|x+y|\,,$$
$$F(x,y) = \int \Big(2x - 3y\log|x+y|\Big)dy = 2xy - 3\int \log|x+y|d(y^2/2) =$$
$$= 2xy - 3\frac{y^2}{2}\log|x+y| + 3\int \frac{y^2}{2}\cdot\frac{1}{x+y}dy = 2xy - 3\frac{y^2}{2}\log|x+y| + \frac{3}{2}\int \frac{y^2-x^2+x^2}{x+y}dy =$$
$$= 2xy - 3\frac{y^2}{2}\log|x+y| + \frac{3}{2}\int\Big(y - x + \frac{x^2}{x+y}\Big)dy =$$
$$= 2xy - 3\frac{y^2}{2}\log|x+y| + \frac{3}{2}\Big(\frac{y^2}{2} - xy + x^2\log|x+y|\Big) = \frac{1}{4}\Big(2xy + 3y^2 + 6(x^2-y^2)\log|x+y|\Big)$$

Su $I\setminus\{(0,0)\}$ questa F è di classe C^∞ e $\partial_{x,y}F = f$. Per calcolare il limite di F nell'origine conviene scrivere

$$F(x,y) = \frac{1}{4}\Big(2xy + 3y^2 + 6(x-y)\underbrace{(x+y)\log|x+y|}_{=\varphi(x+y)}\Big) =$$
$$= \frac{1}{4}\Big(2xy + 3y^2 + 6(x-y)\varphi(x+y)\Big)\,,$$

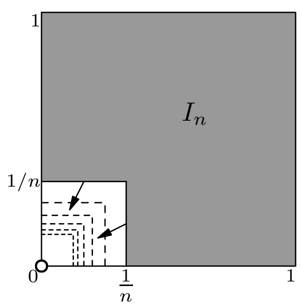
dove $\varphi(t) := t\log|t|$. Sapendo già che $\varphi(t) \to 0$ per $t \to 0$, abbiamo che

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in I}} F(x,y) =$$
$$= \frac{1}{4}\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\x+y\neq 0}} \Big(\underbrace{2xy+3y^2}_{\to 0} + \underbrace{6(x-y)}_{\to 0}\underbrace{\varphi(x+y)}_{\to 0}\Big) = 0\,.$$



Definendo $F(0,0) = 0$ viene una funzione continua su tutto I. Si può quindi applicare il teorema fondamentale generalizzato e concludere che f è integrabile su I e

$$\int_I f = F(1,1) - F(0,1) - F(1,0) + F(0,0) = \frac{5}{4} - \frac{3}{4} - 0 + 0 = \frac{1}{2}\,.$$



Un'altra maniera di provare l'integrabilità di f su I è di passare al limite per convergenza dominata sfruttando il fatto che f è limitata su I. Definiamo $I_n := I\setminus[0,\frac{1}{n}[\times[0,\frac{1}{n}[$ (figura qui accanto). Questa I_n è un compatto contenuto in I e non contenente l'origine. La f è continua su I_n, e quindi la funzione $f\chi_{I_n}$ è integrabile su I. D'altra parte

$$\lim_{n\to+\infty} f(x,y)\chi_{I_n}(x,y) = f(x,y) \qquad \forall(x,y)\in I\,,$$

cioè $f\chi_{I_n}$ converge puntualmente a f. Inoltre la convergenza è dominata, in quanto $-\infty < \inf_I f \le f\chi_{I_n} \le \sup_I f < +\infty$ (ricordiamo che le costanti sono integrabili su I). Per il teorema della convergenza dominata concludiamo che f è integrabile su I.

3. Per ogni n fissato la funzione

$$f_n(x) := \Big(1 + \frac{2x}{n}\Big)^n$$

è un polinomio in x, e quindi è integrabile su $[0,1]$. Inoltre è certamente positiva per $x \ge 0$. La funzione integranda ha limite finito per $n \to +\infty$: per vederlo si può per esempio passare al logaritmo, fare il cambio di variabile $t = 1/n$ e poi applicare la regola de L'Hôpital:

n	$\int_0^1 f_n =$	$\int_0^1 f_n \approx$
1	2	2.0000
2	7/3	2.3333
3	68/27	2.5185
4	211/80	2.6375
5	8502/3125	2.7206
6	14197/5103	2.7821
7	2330120/823543	2.8294
8	1690981/589824	2.8669
9	1122532010/387420489	2.8975
10	313968931/107421875	2.9228

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \ln f_n(x) &= \lim_{n\to+\infty} n\ln\Big(1+\frac{2x}{n}\Big) = \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(1+\frac{2x}{n})}{1/n} = \lim_{t\to0^+}\frac{\ln(1+2xt)}{t} \overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \\ &= \lim_{t\to0^+}\frac{\frac{2x}{1+2xt}}{1} = 2x\,,\end{aligned}$$

da cui

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} e^{\ln f_n(x)} = e^{2x}\,.$$

Ci chiediamo se il limite di $\int_0^1 f_n$ per $n\to+\infty$ spesso si può calcolare passando al limite sotto il segno di integrale:

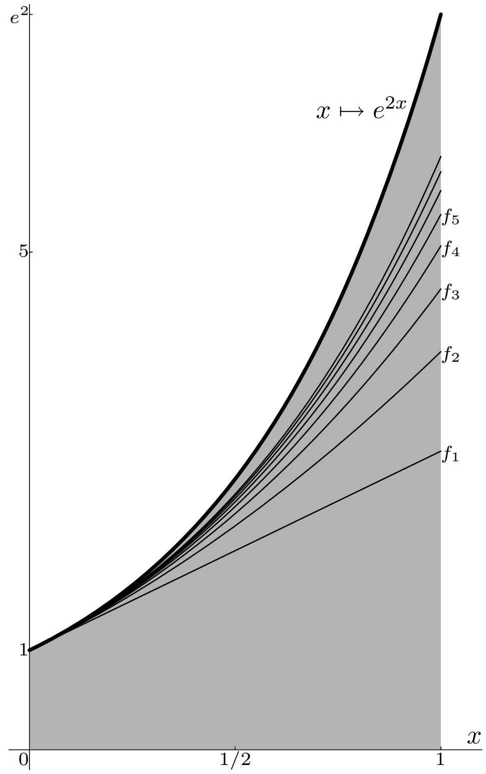
$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n \overset{?}{=} \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n = \int_0^1 e^{2x}dx = \Big[\frac{e^{2x}}{2}\Big]_0^1 = \frac{e^2-1}{2}\,.$$

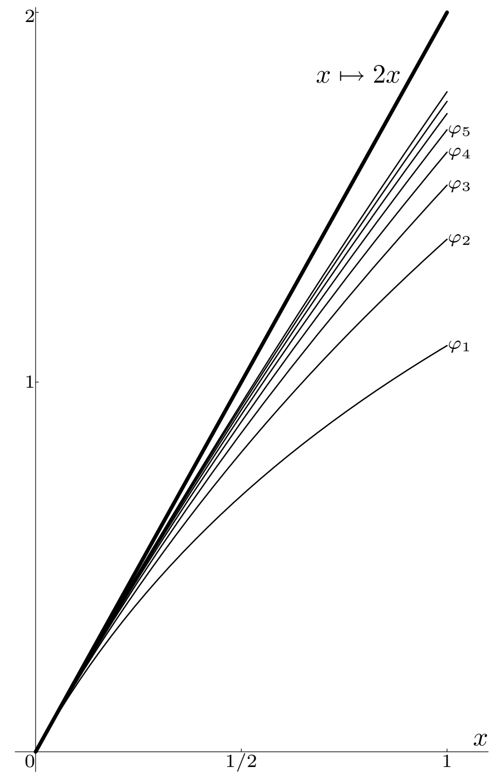
In vista di applicare il teorema della convergenza dominata notiamo che

$$g(x) := 0 \le f_n(x) \le \sup_{k\in\mathbb{N}} f_k(x) := h(x)\,.$$

La funzione dominante dal basso g è ovviamente integrabile su $[0,1]$. Per vedere se per caso anche h è integrabile, cerchiamo di calcolarla, o almeno stimarla. Una stima facile si può fare così: dato che per noi $0 \le x \le 1$,

$$0 \le f_n(x) = \Big(1+\frac{2x}{n}\Big)^n \le \Big(1+\frac{2}{n}\Big)^n = f_n(1) \le \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(1) < +\infty\,;$$





l'estremo superiore della successione è finito perché la successione $n \mapsto f_n(1)$ converge. L'ultimo membro è una costante, che ha integrale finito su $[0,1]$. Se vogliamo un calcolo preciso di $h(x)$, studiamo l'andamento di $f_n(x)$, o anzi di $\ln f_n(x)$, come funzione di n, per x fisso fra 0 e 1. Questo andamento non è ovvio, perché $\ln f_n(x)$ è prodotto della funzione crescente n con la funzione decrescente $\ln(1+2x/n)$. Passiamo alla derivata prima rispetto a n, pensata come variabile reale invece che intera:

$$\begin{aligned}
\varphi_n(x) :=& \ \ln f_n(x) = n \ln\Bigl(1 + \frac{2x}{n}\Bigr), \\
\frac{\partial \varphi_n(x)}{\partial n} =& \ \ln\Bigl(1 + \frac{2x}{n}\Bigr) + n \frac{1}{1 + \frac{2x}{n}} \cdot \Bigl(-\frac{2x}{n^2}\Bigr) = \ln\Bigl(1 + \frac{2x}{n}\Bigr) - \frac{2x}{n+2x}.
\end{aligned}$$

La derivata $\partial\varphi_n(x)/\partial n$ è una funzione trascendente, di cui è difficile capire direttamente il segno, però certamente tende a 0 per $n \to +\infty$. Passiamo alla derivata seconda:

$$\frac{\partial^2 \varphi_n(x)}{\partial n^2} = \frac{1}{1 + \frac{2x}{n}} \cdot \Bigl(-\frac{2x}{n^2}\Bigr) + \frac{2x}{(n+2x)^2} = -\frac{2x}{n(n+2x)} + \frac{2x}{(n+2x)^2} = 2x \frac{-n-2x+n}{n(n+2x)^2} = -\frac{2x}{n(n+2x)^2}.$$

La derivata seconda è chiaramente ≤ 0 per ogni $x \geq 0$ e $n \geq 1$. Quindi la derivata prima $n \mapsto \partial\varphi_n(x)/\partial n$ è decrescente rispetto a n. Poiché tende a 0 per $n \to +\infty$, come già abbiamo notato, è necessariamente positiva: $\partial\varphi_n(x)/\partial n \geq 0$ per $x \geq 0$ e $n \geq 1$. A sua volta quindi la funzione $n \mapsto \varphi_n(x)$ risulta crescente. Pertanto anche $n \mapsto f_n(x) = e^{\varphi_n(x)}$ è crescente, e quindi

$$h(x) = \sup_{k \in \mathbb{N}} f_k(x) = \lim_{k \to +\infty} f_k(x) = e^{2x}.$$

La funzione h è continua, e quindi integrabile su $[0,1]$. Si possono applicare sia il teorema della convergenza dominata che quello della convergenza monotona. La conclusione è che effettivamente

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 \Bigl(1 + \frac{2x}{n}\Bigr)^n dx \overset{!}{=} \int_0^1 \lim_{n \to +\infty} \Bigl(1 + \frac{2x}{n}\Bigr)^n dx = \frac{e^2 - 1}{2} \approx 3{,}19453.$$