Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2003/04

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Analisi Matematica 5

Prova Scritta del 15 luglio 2004

Cognome e Nome:

Matricola: — Documento d'identità (se chiesto):

Tempo a disposizione: 3 ore.

1. Poniamo $f(t,y) := \begin{cases} \dfrac{2(t^2-y)}{t} & \text{se } 0 < y < t^2, \\ 2t & \text{se } y \le 0, \\ 0 & \text{per i rimanenti } (t,y) \in \mathbb{R}^2. \end{cases}$

a. Dimostrare che f è continua $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
(Il punto delicato è l'origine, dove la funzione $(t,y) \mapsto 2(t^2-y)/t$ non ha limite se considerata su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,y) \ : \ y \in \mathbb{R}\}$; mostrare per es. che $|f(t,y)| \le |2t|$ per ogni t, y).

b. Per $u(t)$ continua $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ poniamo $(Tu)(t) := \int_0^t f(s, u(s))ds$. Mostrare che T è una mappa ben definita da $C(\mathbb{R})$ in se stesso.

c. Definiamo la successione iterativa $\varphi_0(t) \equiv 0$ e $\varphi_{n+1} := T\varphi_n$. Dimostrare che $\varphi_n(t) = 0$ se n è pari, e $\varphi_n(t) = t^2$ se n è dispari. Dedurne che la successione di funzioni φ_n non converge puntualmente in nessun punto diverso dallo 0.

d. Verificare direttamente che $f(t,y)$ non è localmente lipschitziana rispetto a y.

e. Mostrare che $y(t) := t^2/2$ è l'unica soluzione massimale del problema di Cauchy $y'(t) = f(t, y(t))$, $y(0) = 0$. (Risolvere separatamente nelle tre regioni e poi agganciare).

2. Consideriamo l'equazione differenziale $y'(x) = \dfrac{1}{3y^2 + (y^3 - x)^2}$, ($x$ variabile indipendente).

a. Il problema di Cauchy con $y(x_0) = y_0$ ha esistenza e unicità locale se $(x_0, y_0) \ne (0,0)$.

b. Mostrare che se $\varphi\colon]\alpha, \beta[\to \mathbb{R}$ è soluzione, allora anche $\psi\colon]-\beta, -\alpha[\to \mathbb{R}$ definita da $\psi(x) := -\varphi(-x)$ è soluzione.

c. Mostrare che se $x_0 > 0$ la soluzione massimale del problema di Cauchy con $y(x_0) = y_0$ è definita almeno su $]0, +\infty[$. (Maggiorare il secondo membro sulle striscie…).

d. La soluzione massimale del problema di Cauchy con $y(0) = y_0 \ne 0$ è definita su tutto $\mathbb{R}$.

e. Verificare che la funzione $\varphi(x) := \sqrt[3]{x}$ è soluzione per $x > 0$ e per $x < 0$.

f. Sia φ_n la soluzione massimale con $\varphi_n(0) = 1/n$. Allora $\varphi_n(x) > \varphi_{n+1}(x) > \sqrt[3]{x}$. La successione φ_n converge? Il limite è una soluzione per $x \ne 0$?

g. La funzione $(x,y) \mapsto (y^4 - xy - 1)/(y^3 - x)$ è un integrale primo.

h. Trovare e risolvere l'equazione differenziale soddisfatta dalle inverse y^{-1} delle soluzioni.

Punti: 8+5+5+8+10, 5+5+8+8+5+10+8+8.