Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2003/04

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Analisi Matematica 5

Prova Scritta del 23 marzo 2004

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento d'identità (se chiesto):

Tempo a disposizione: 3 ore.

1. Partiamo dall'equazione differenziale

$$y''(t) = -\frac{\big(ty'(t)\big)^4 + 14}{15t^2}.$$

a. Dimostrare che se φ è una soluzione, allora anche $t \mapsto \varphi(at) + b$ è soluzione, comunque si scelgano le costanti $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{R}$.

b. Verificare che se $t \mapsto y(t)$ è soluzione dell'equazione iniziale, allora la funzione $u(s) := y(\log s)$ è soluzione dell'equazione $15u''(s) = g(u'(s))$, dove $g(z) := -z^4 + 15z - 14$.

c. Trovare le soluzioni dell'equazione $15u''(s) = g(u'(s))$ che hanno la forma $u(s) = \lambda s$ con λ costante. Trovare di conseguenza delle famiglie a un parametro di soluzioni dell'equazione di partenza.

d. Se u è soluzione di $15u''(s) = g(u'(s))$, verificare che l'equazione differenziale verificata da $p = u' \circ u^{-1}$, negli intervalli in cui u è invertibile, è $15pp' = g \circ p$.

e. Sia G una primitiva di $q \mapsto 15q/g(q)$. Mostrare che $G(u') - u$ è una costante del moto per l'equazione $15u'' = g(u')$. Mostrare infine che $t \mapsto G(ty'(t)) - y(t)$ è costante se $y(t)$ è una soluzione dell'equazione originaria.

2. Sia $f\colon [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Per ogni $y\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ continua e $y_0, \dot{y}_0 \in \mathbb{R}$ costanti fissate, definiamo $Ty\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ come

$$(Ty)(t) := y_0 + \dot{y}_0 t + \int_0^t (t-s) f\big(s, y(s)\big)\, ds \qquad \text{per } t \in [0,1]\,.$$

a. Mostrare che Ty è continua, e che y è un punto fisso di T se e solo se y è di classe C^2 ed è una soluzione del problema di Cauchy $y''(t) = f(t, y(t))$, $y(0) = y_0$, $y'(0) = \dot{y}_0$.

b. Indichiamo con $X_{a,M}$ lo spazio delle funzioni continue da $[0,a]$ in $[-M, M]$ con la norma del sup. Mostrare che esiste $M > 0$ tale che per ogni $a \in [0,1]$ abbastanza piccolo la T manda $X_{a,M}$ in sé.

c. Supponiamo che $f(t,y)$ sia lipschitziana (globalmente) rispetto alla variabile y, uniformemente in t. Mostrare che se $a > 0$ è abbastanza piccolo, allora T è una contrazione da $X_{a,M}$ in sé.

Punti: 5+8+5+5+8, 8+8+8.