Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2003/04

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Analisi Matematica 5

Prova Scritta del 7 gennaio 2004

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento d'identità (se chiesto):

Tempo a disposizione: 3 ore.

1. Siano $f, g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ due funzioni localmente lipschitziane e tali che

$$xf(x,y) + yg(x,y) \le 0 \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Dimostrare che le soluzioni dei problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = f(x,y) \\ y'(t) = g(x,y) \\ x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0 \end{cases}$$

sono tutte globalmente definite nel futuro. Possono essere non globali nel passato? (Derivare $x(t)^2 + y(t)^2$).

2. È data l'equazione differenziale

$$y'(x) = \frac{2x - y + 1}{2y - 4x - 1},$$

a. Trovare l'equazione soddisfatta da $u(x) := 2x - y(x)$, trovarne le soluzioni costanti, e risolverla in generale in forma implicita. Disegnare un grafico qualitativo delle soluzioni in $u(x)$. Mostrare che le soluzioni che sono definite per ogni $x \in \mathbb{R}$ sono tutte e sole quelle con $u(x) \le -3/5$.

b. Disegnare un grafico qualitativo delle soluzioni in $y(x)$. Ce ne sono con grafico rettilineo? Qual'è il limite di $y(x)$ per $x \to \pm\infty$, quando ha senso?

c. Mostrare che la funzione $f(x,y) = (10x - 5y + 3)e^{5(x+2y-1)}$ è costante lungo le soluzioni dell'equazione originale.

d. Sia $\varphi\colon]a, +\infty[\to]b, +\infty[$ un diffeomorfismo, e sia $m > 0$ tale che $\varphi'(v) \to m$ per $v \to +\infty$. Supponiamo che $\varphi(v) - mv$ tenda a ∞ per $v \to +\infty$ (in particolare, il grafico di φ non ha asintoti obliqui). Dimostrare che allora $(\varphi^{-1})'(x) \to 1/m$ e $\varphi^{-1}(x) - x/m \to \infty$ per $x \to +\infty$ (in particolare anche il grafico di φ^{-1} non ha asintoti obliqui).
(Posto $\psi_1(v) := \varphi(v) - mv$ e $\psi_2(x) := \varphi^{-1}(x) - x/m$, notare che $m\psi_2 = \psi_1 \circ \varphi^{-1}$).

e. Anche alla luce (se si vuole) del punto **d**, cercare eventuali rette asintotiche delle soluzioni $y(x)$ o $u(x)$ dei punti precedenti.

Punti: 15, 10+10+5+8+8.