Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2003/04

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Analisi Matematica 5

Prova Scritta del 10 dicembre 2003

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento d'identità (se chiesto):

Tempo a disposizione: 3 ore.

1. Data l'equazione differenziale

$$y''(t) = \frac{\sqrt{4y^2 + 3(y')^2} - 4y}{3},$$

a. discutere esistenza e unicità locale, ed eventualmente globale, per i suoi problemi di Cauchy;

b. trovare l'equazione del primo ordine verificata localmente dalle funzioni $y' \circ y^{-1}$ nel piano delle fasi (y, y'), e trovarne la soluzione generale;

c. verificare che la funzione $(y, y') \mapsto \sqrt{4y^2 + 3(y')^2} - y$ è un integrale primo per l'equazione del secondo ordine di partenza; descrivere le curve di livello dell'integrale primo; ci sono ricadute sull'esistenza globale delle soluzioni?

d. Verificare che $t \mapsto y'(t)^2 + y''(t)^2$ è costante lungo le soluzioni. Assieme con l'integrale primo, cosa suggerisce questo sull'andamento delle soluzioni?
(Ragionare sul piano delle fasi (y, y')).

e. Trovare esplicitamente la soluzione dell'equazione di partenza che verifica le condizioni iniziali $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
(Usando l'integrale primo del punto **c** si trova un'equazione del primo ordine in $y(t)$ a variabili separabili; più rapidamente, usando anche il punto **d** si può indovinare in anticipo la forma della soluzione).

2. Data l'equazione differenziale $x^2 y'(x) = xy(x) - y(x)^2$,

a. discutere esistenza e unicità locale quando $x \neq 0$, e mostrare che se $x \mapsto y(x)$ è soluzione, allora anche $x \mapsto -y(-x)$ lo è.

b. Risolverla esplicitamente per $x \neq 0$ e disegnare un grafico delle soluzioni;

c. Esistono soluzioni definite in un intorno bucato (eventualmente sinistro o destro) di 0 ma non prolungabili nell'origine? Trovare tutte le soluzioni di classe C^1 nell'origine. Ce ne sono di classe C^2?

Punti: 5+10+8+8+10, 5+10+8.