Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2002/03

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica (nuovo ordinamento)

Analisi Matematica 5

Prova Scritta del 24 luglio 2003

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento d'identità (se chiesto):

Tempo a disposizione: 3 ore.

1. a. Siano $F, G\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, con G di classe C^1 e F derivabile. Dimostrare che $x \mapsto F'(x)G(x)$ è integrabile su $[a,b]$ nel senso di Henstock-Kurzweil.
(Trovarne una primitiva integrando per parti; attenti a non usare assunzioni tacite).

b. Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile n volte in tutti i punti, e derivata n-esima non necessariamente continua. Dimostrare che vale la formula di Taylor col resto integrale:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}dt,$$

dove l'integrale esiste nel senso di Henstock-Kurzweil.
(Per induzione; integrazione per parti, da giustificare; per semplificare si può porre $x_0 = 0$).

c. La formula vale anche se si assume che la derivata $n-1$-esima esista continua ovunque ma che la derivata n-esima possa non esistere in un insieme al più numerabile di punti.

2. Calcolare, se ha senso, il

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-\cos\dfrac{(n\pi-1)x+\pi}{n\pi}}}\,dx\,.$$

Punti: 8+10+10, 15.