Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2002/03

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Analisi Matematica 5

Prova Scritta del 9 gennaio 2003

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento d'identità (se chiesto):

Tempo a disposizione: 3 ore.

1. Sia $\delta\colon [a,b] \to]0,+\infty[$ un calibro e sia $\bar{x} \in [a,b]$.

a. Supponiamo che $\delta(x) < |x - \bar{x}|$ per ogni $x \in [a,b] \setminus \{\bar{x}\}$. Prendiamo una suddivisione marcata di $[a,b]$ adattata a δ. Dimostrare che necessariamente uno dei punti marcanti x_i della suddivisione coincide con $\bar{x}$.

b. Viceversa, supponiamo che per ogni suddivisione marcata di $[a,b]$ uno dei punti marcanti x_i coincida necessariamente con $\bar{x}$. Dimostrare che allora $\delta(x) < |x-\bar{x}|$ per ogni $x \in [a,b]\setminus\{\bar{x}\}$.

c. Dire se δ può o no avere la seguente proprietà: per ogni suddivisione marcata di $[a,b]$ adattata a δ tutti i punti marcanti x_i sono numeri razionali.
(Che conseguenze avrebbe un tale calibro sulla funzione di Dirichlet, che vale 1 sui razionali e 0 altrove?).

2. Per $x \in \mathbb{R}$ poniamo

$$F(x) := \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{z - z^2}(2 + x - x\sqrt{z})^2}\,dt\,.$$

a. Per quali x la $F(x)$ è ben definita e finita?

b. Dimostrare che la $F(x)$ è continua e derivabile per $x > -1$.

Punti: 15+15, 15+15.