Università degli Studi di Udine Anno Accademico 2002/03

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Istituzioni di Analisi Superiore I, Analisi 5

Prova Scritta del 17 dicembre 2002

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento d'identità (se chiesto):

Tempo a disposizione: 3 ore.

1. Siano $f_n, g, h\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ funzioni integrabili secondo Henstock-Kurzweil.

a. Supponiamo che $g \leq f_n \leq h$ per ogni n. Dimostrare che allora $\min\lim_{n\to+\infty} f_n$ e $\max\lim_{n\to+\infty} f_n$ sono pure integrabili e vale la disuguaglianza

$$\int_a^b \min_{n\to+\infty}\lim f_n \leq \min_{n\to+\infty}\lim \int_a^b f_n \leq \max_{n\to+\infty}\lim \int_a^b f_n \leq \int_a^b \max_{n\to+\infty}\lim f_n\,.$$

b. Supponiamo invece che $g \leq f_n$ e che $h \leq \min\lim_{n\to+\infty} f_n$. Dimostrare che

$$\int_a^b h \leq \min_{n\to+\infty}\lim \int_a^b f_n\,.$$

(Porre $h_n := \min\{f_n, h\}$ e applicare il punto **a** ad h_n).

2. Per $x \in \mathbb{R}$ poniamo

$$F(x) := \int_0^{+\infty} \frac{1}{t}\arctan\Big(\frac{xt}{1+x+t^2}\Big)\,dt\,.$$

a. Per quali x la $F(x)$ è ben definita e finita?

b. Dimostrare che la $F(x)$ è continua e derivabile per $x > -1$.
(Si può usare la disuguaglianza $|\arctan a| \leq |a|$).

c. Dimostrare che $F(x) = \frac{\pi}{2}\log(1+x)$ per ogni $x > -1$.
(Calcolare $F'(x)$ derivando sotto il segno di integrale; mettere in evidenza un fattore $1+t^2$ che si cancella; l'integrale in t che rimane si calcola elementarmente...).

d. Dimostrare che $F(x)$ è identicamente nulla per $x < -1$.
(Spezzare l'integrale nel punto di discontinuità; col cambio di variabile $u = (-1-x)/t$ mostrare che i due termini sono opposti).

Punti: 15+10, 8+15+10+10.

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Istituzioni di Analisi Superiore I, Analisi 5

Prova Scritta del 17 dicembre 2002

Svolgimento

1. a. Sappiamo che se a_n è una successione di numeri reali, allora

$$\max\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty}\sup_{k\geq n} a_n = \lim_{n\to+\infty}\lim_{k\to+\infty}\max\{a_n, a_{n+1}, \dots, a_{k-1}, a_k\}\,.$$

Quindi per ogni $x \in [a,b]$ abbiamo

$$\psi(x) := \max\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty}\overbrace{\lim_{k\to+\infty}\underbrace{\max\{f_n(x), f_{n+1}(x), \dots, f_{k-1}(x), f_k(x)\}}_{=:\varphi_{n,k}(x)}}^{=:\varphi_n(x)} =$$
$$= \lim_{n\to+\infty}\lim_{k\to+\infty}\varphi_{n,k}(x) = \lim_{n\to+\infty}\varphi_n(x)\,.$$

La funzione $\varphi_{n,k}$ è integrabile per ogni $k \geq n$. Infatti aggiungendo e togliendo g ad ogni elemento del max, e poi portando fuori il $+g$,

$$\varphi_{n,k} = \max\{f_n(x), f_{n+1}(x), \dots, f_{k-1}(x), f_k(x)\} =$$
$$= g + \max\{\overbrace{f_n(x)-g}^{\in L^1}, \overbrace{f_{n+1}(x)-g}^{\in L^1}, \dots, \overbrace{f_{k-1}(x)-g}^{\in L^1}, \overbrace{f_k(x)-g}^{\in L^1}\}\,.$$

Ciascuna delle funzioni $f_i - g$ è in $L^1([a,b])$ perché integrabile (differenza di integrabili) e positiva. Sappiamo che il massimo di una famiglia finita di funzioni di L^1 è ancora in L^1; in particolare è integrabile. L'aggiunta finale della g, che è integrabile, produce una funzione integrabile.
Poiché $g \leq f_n \leq h$ per ogni n, risulta che anche $g \leq \varphi_{n,k} \leq h$ per ogni $k \geq n$. Per il teorema della convergenza dominata deduciamo che anche φ_n è integrabile e risulta

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b \varphi_{n,k} = \int_a^b \varphi_n\,.$$

Potremmo anche invocare il teorema della convergenza monotona, perché la successione $k \mapsto \varphi_{n,k}(x)$ è crescente. Comunque, risulta pure che $g \leq \varphi_n \leq h$ per ogni n, e $\varphi_n \to \psi$ per $n \to +\infty$. Applicando di nuovo il teorema della convergenza dominata (o monotona, se si preferisce, dato che $n \mapsto \varphi_n$ è decrescente), si ricava che ψ è integrabile su $[a,b]$ e

$$\int_a^b \psi = \lim_{n\to+\infty}\int_a^b \varphi_n\,.$$

Ora, per ogni i fra n e k

$$f_i \leq \max\{f_n, f_{n+1}, \dots, f_k\} = \varphi_{n,k}\,,$$

per cui, integrando,

$$\int_a^b f_i \leq \int_a^b \varphi_{n,k} \qquad \forall i \in \{n, n+1, \dots, k\}\,,$$

per cui

$$\max\Big\{\int_a^b f_n, \int_a^b f_{n+1}, \dots, \int_a^b f_k\Big\} \leq \int_a^b \varphi_{n,k}\,.$$

Il primo membro è crescente rispetto a k, per cui ha limite, e si ha

$$\sup_{k\geq n}\int_a^b f_k = \lim_{k\to+\infty}\max\Big\{\int_a^b f_n, \int_a^b f_{n+1}, \dots, \int_a^b f_k\Big\} \leq \lim_{k\to+\infty}\int_a^b \varphi_{n,k} = \int_a^b \varphi_n\,.$$

Il primo membro di quest'ultima formula è decrescente rispetto a n. Quindi

$$\operatorname*{max\,lim}_{n\to+\infty} \int_a^b f_n = \lim_{n\to+\infty} \sup_{k\geq n} \int_a^b f_k \leq \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \varphi_n = \int_a^b \psi = \int_a^b \operatorname*{max\,lim}_{n\to+\infty} f_n \,,$$

che è metà della disuguaglianza che volevamo dimostrare. L'altra metà si dimostra in modo analogo, oppure applicando quanto già dimostrato alla successione $-f_n$.

b. Nelle ipotesi che $g \leq f_n$ e che $h \leq \operatorname*{min\,lim}_{n\to+\infty} f_n$ non possiamo usare il punto **a**, perché manca una dominazione superiore per f_n. Però se definiamo

$$h_n := \min\{h, f_n\} = g + \min\{\underbrace{h-g}_{\in L^1}, \underbrace{f_n - g}_{\in L^1}\} \,,$$

abbiamo che h_n è integrabile, $g \leq h_n \leq h$ e

$$\operatorname*{min\,lim}_{n\to+\infty} h_n(x) = \min\Big\{h, \underbrace{\operatorname*{min\,lim}_{n\to+\infty} f_n}_{\geq h}\Big\} = h \,.$$

Poiché $h_n \leq f_n$ per ogni n,

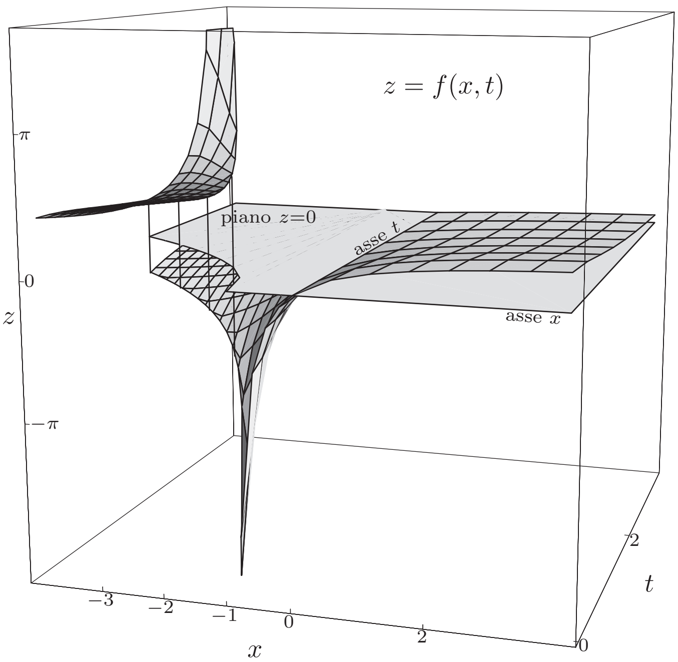
$$\int_a^b h_n \leq \int_a^b f_n \,.$$

Inoltre $g \leq h_n \leq h$ per ogni n, per cui alla successione h_n si applica il punto **a**:

$$\int_a^b h = \int_a^b \operatorname*{min\,lim}_{n\to+\infty} h_n \leq \operatorname*{min\,lim}_{n\to+\infty} \int_a^b h_n \,.$$

2. a. Fissiamo $x \in \mathbb{R}$. La funzione

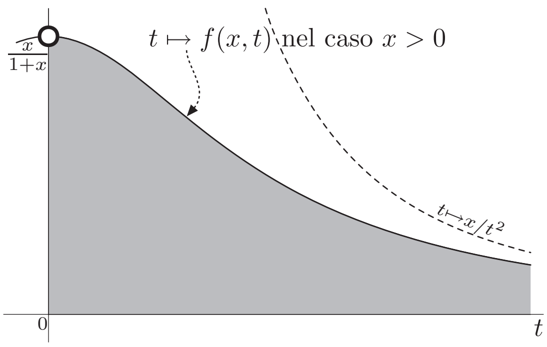
$$t \mapsto f(x,t) := \frac{1}{t} \arctan \frac{xt}{1+x+t^2}$$

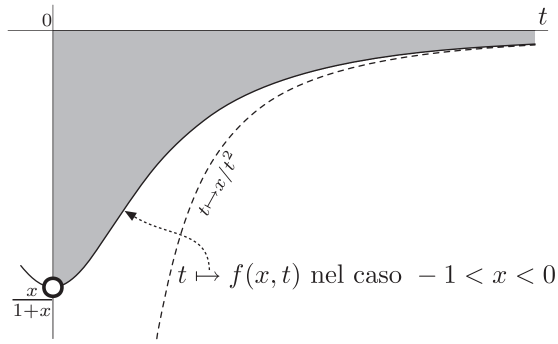


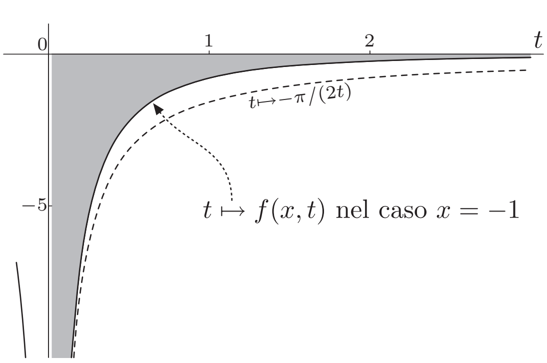
è definita e di classe C^∞ eccetto dove si annullano i denominatori. Studiamo prima l'integrabilità a $+\infty$: poiché $xt/(1+x+t^2) \to 0$ per $t \to +\infty$, usando lo sviluppo asintotico $\arctan u = u + o(u)$ per $u \to 0$ ricaviamo che

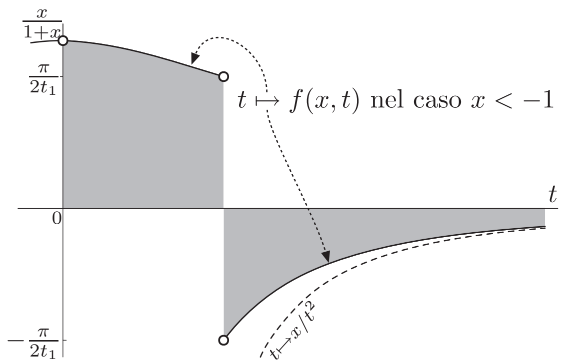
$$\begin{aligned} f(x,t) &= \frac{1}{t}\left(\frac{xt}{1+x+t^2} + o\Big(\frac{xt}{1+x+t^2}\Big)\right) \\ &= \frac{x}{1+x+t^2} + o\Big(\frac{x}{1+x+t^2}\Big) = \\ &= \frac{x}{1+x+t^2} + o(t^{-2}), \quad t \to +\infty \,. \end{aligned}$$

Dunque l'andamento per $t \to +\infty$ è di tipo integrabile, indipendentemente dal valore di x.
Passiamo a studiare l'integrabilità nei punti in cui i denominatori della formula di $f(x,t)$ si annullano. Il primo denominatore t si annulla per $t = t_0 := 0$. Il secondo si annulla quando $t^2 = -1 - x$. Ora bisogna distinguere tre casi:









1. se $-1-x<0$, cioè se $x>-1$, il secondo denominatore non si annulla mai; l'argomento dell'arcotangente tende a 0 per $t \to t_0 = 0$. Ancora usando lo sviluppo $\arctan u = u + o(u)$ per $u \to 0$, ricaviamo che l'andamento asintotico di $f(x,t)$ per $t \to t_0 = 0$ è

$$f(x,t) = \frac{1}{t}\left(\frac{xt}{1+x+t^2} + o\Big(\frac{xt}{1+x+t^2}\Big)\right) = \frac{x}{1+x+t^2} + o\Big(\frac{x}{1+x+t^2}\Big) = \frac{x}{1+x} + o(1) \quad \text{per } t \to t_0 = 0\,.$$

Quindi la $f(x,t)$ ha limite finito per $t \to t_0 = 0$, che è un andamento integrabile. Conclusione: $F(x)$ è ben definita e finita quando $x > -1$.

2. se $-1-x=0$, cioè se $x=-1$, il secondo denominatore si annulla pure lui per $t = t_0 = 0$. La funzione diventa

$$f(-1,t) = \frac{1}{t}\arctan\frac{-t}{1-1+t^2} = \frac{1}{t}\arctan\Big(-\frac{1}{t}\Big) = \frac{1}{t}\Big(-\frac{\pi}{2} + o(1)\Big) \qquad \text{per } t \to 0^+\,.$$

Dunque $f(-1,t)$ ha andamento non integrabile per $t \to 0^+$. La $F(x)$ non ha valore finito quando $x=-1$.

3. se $-1-x>0$, cioè se $x<-1$, il secondo denominatore si annulla per $t = \pm\sqrt{-1-x}$; soltanto la radice positiva $t_1 = +\sqrt{-1-x}$ si trova nel dominio di integrazione. Per $t \to t_1^\pm$ la $f(x,t)$ ha limiti finiti:

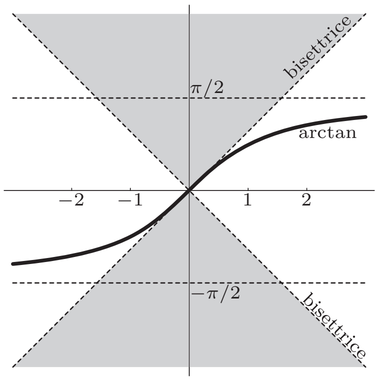
$$f(x,t) = \frac{1}{t}\arctan\frac{xt}{1+x+t^2} = \frac{1}{t}\arctan\frac{xt}{-t_1^2+t^2} \longrightarrow \frac{1}{t_1}\cdot\Big(\mp\frac{\pi}{2}\Big) \qquad \text{per } t \to t_1^\pm\,,$$

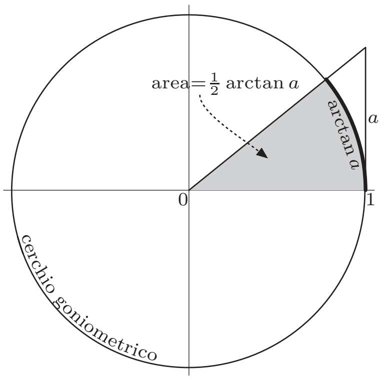
e quindi l'andamento attorno a t_1 è integrabile. Per $t \to t_0 = 0^+$ la $f(x,t)$ ha limite finito, con lo stesso conto che nel caso $x>-1$:

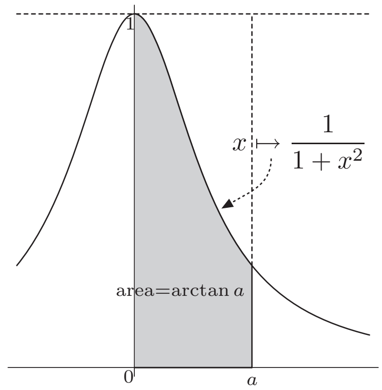
$$\begin{aligned} f(x,t) &= \frac{1}{t}\left(\frac{xt}{1+x+t^2} + o\Big(\frac{xt}{1+x+t^2}\Big)\right) = \\ &= \frac{x}{1+x+t^2} + o\Big(\frac{x}{1+x+t^2}\Big) = \frac{x}{1+x} + o(1) \quad \text{per } t \to t_0 = 0\,. \end{aligned}$$

Dunque quando $x<-1$ la $F(x)$ è ben definita e a valori finiti.

Conclusione: $F(x)$ è ben definita e a valori finiti se e solo se $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\} =: D$.







b. La disuguaglianza $|\arctan a| \leq |a|$ si può ricavare per via geometrica: per esempio, se $a > 0$, consideriamo il triangolo di vertici l'origine e i punti $(1, 0)$ e $(1, a)$. Il triangolo ha area $a/2$, e la sua intersezione col cerchio goniometrico (pieno) è un settore di angolo al centro $\arctan a$, che ha area $(\arctan a)/2$. Poiché il settore è contenuto nel triangolo, si ricava che $(\arctan a)/2 < a/2$. Si può anche ragionare per via integrale:

$$|\arctan a| = \left|\int_0^a \frac{1}{1+t^2}\,dt\right| = \begin{cases} \displaystyle\int_0^a \frac{1}{1+t^2}\,dt \leq \int_0^a 1\,dt = 1(a-0) = |a| & \text{se } a \geq 0, \\ \displaystyle -\int_0^a \frac{1}{1+t^2}\,dt = \int_a^0 \frac{1}{1+t^2}\,dt \leq \int_a^0 1\,dt = 1(0-a) = |a| & \text{se } a < 0, \end{cases}$$

Di sicuro non si può dominare $f(x, t)$ con una funzione di $L^1(]0, +\infty[)$ se si lascia variare x su tutto $]-1, +\infty[$ (o su un qualsiasi intervallo che abbia uno di quei due estremi), perché i limiti per $x \to -1^+$ e per $x \to +\infty$ non sono funzioni integrabili rispetto a t:

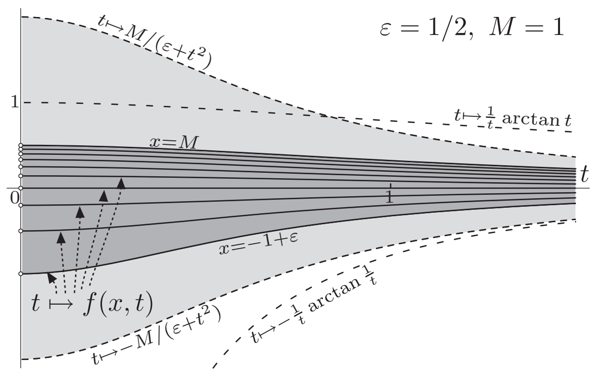
$$\lim_{x \to -1^-} f(x, t) = -\frac{1}{t} \arctan \frac{1}{t} = -\frac{\pi}{2t} + o(1/t) \qquad \text{per } t \to 0^+,$$
$$\lim_{x \to +\infty} f(x, t) = \frac{1}{t} \arctan t = \frac{\pi}{2t} + o(1/t) \qquad \text{per } t \to +\infty.$$

Applichiamo la disuguaglianza alla nostra $f(x, t)$:

$$|f(x, t)| = \left|\frac{1}{t} \arctan \frac{xt}{1+x+t^2}\right| \leq \frac{1}{|t|} \cdot \frac{|x|t}{|1+x+t^2|} = \frac{|x|}{|1+x+t^2|}\,.$$

Se prendiamo $\varepsilon > 0$ e $M > 0$ possiamo maggiorare uniformemente con una funzione di $L^1(]0, +\infty[)$:

$$x \in [-1+\varepsilon, M]$$
$$\Downarrow$$
$$|f(x, t)| \leq \frac{|x|}{|1+x+t^2|} \leq \frac{M}{\varepsilon + t^2} \in L^1\big(]0, +\infty[\big)\,.$$



Poiché la $f(x, t)$ è chiaramente continua rispetto a x per $x > -1$, deduciamo che la F è continua su $[-1+\varepsilon, M]$. Per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$ e $M > 1$, concludiamo che F è continua su $]-1, +\infty[$.

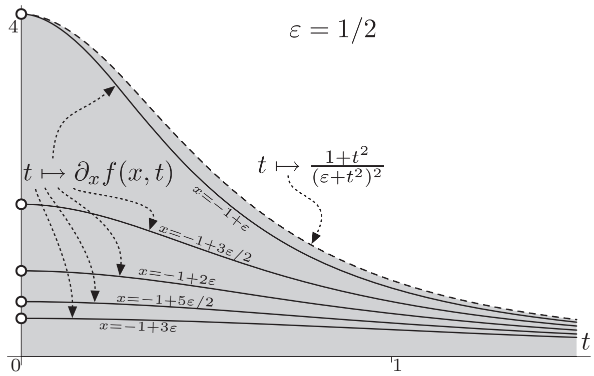
Per ottenere una dominazione, si poteva anche ragionare osservando che $f(x, t)$ cresce con x quando $x > -1$ e $t > 0$. Questo lo si vede o derivando rispetto a x, oppure con l'identità

$$\frac{xt}{1+x+t^2} = t - \frac{t+t^3}{1+x+t^2},$$

ricordando che l'arcotangente è una funzione crescente. Quindi

$$x \in [-1+\varepsilon, M] \quad \Rightarrow \quad f(-1+\varepsilon, t) \le f(x,t) \le f(M,t).$$

Già sappiamo che $t \mapsto f(-1+\varepsilon, t)$ e $t \mapsto f(M,t)$ sono in $L^1(]0,+\infty[)$.



La derivata parziale di $f(x,t)$ rispetto a x è

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(x,t)}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{1}{t}\arctan\frac{xt}{1+x+t^2}\Big) = \\ &= \frac{1}{t}\cdot\frac{1}{1+(\frac{xt}{1+x+t^2})^2}\cdot\frac{t(1+x+t^2)-xt\cdot 1}{(1+x+t^2)^2} = \\ &= \frac{1+t^2}{(1+x+t^2)^2+x^2t^2}\,.\end{aligned}$$

Questa è chiaramente continua rispetto a x per $x > -1$, e quando $\varepsilon > 0$ possiamo maggiorare uniformemente rispetto a $x \in [-1+\varepsilon, +\infty[$ con una funzione di $L^1(]0,+\infty[)$:

$$x \ge -1+\varepsilon \quad \Rightarrow \quad \Big|\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}\Big| = \Big|\frac{1+t^2}{(1+x+t^2)^2+x^2t^2}\Big| \le \frac{1+t^2}{(\varepsilon+t^2)^2+0} \in L^1\big(]0,+\infty[\big)\,.$$

Quindi F è di classe C^1 su $[-1+\varepsilon,+\infty[$ per ogni $\varepsilon > 0$. In definitiva, F è C^1 su $]-1,+\infty[$, e vale la formula di derivazione sotto il segno di integrale:

$$F'(x) = \int_0^{+\infty}\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}\,dx = \int_0^{+\infty}\frac{1+t^2}{(1+x+t^2)^2+x^2t^2}\,dt\,.$$

c. Per calcolare F' conviene semplificare l'integrando mettendo in evidenza un fattore $1+t^2$ al denominatore nell'integrando:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(x,t)}{\partial x} &= \frac{1+t^2}{(1+x+t^2)^2+x^2t^2} = \frac{1+t^2}{\underbrace{(1+x+t^2)^2-x^2}_{\text{prodotto notevole}}+x^2+x^2t^2} = \\ &= \frac{1+t^2}{(1+x+t^2-x)(1+x+t^2+x)+x^2(1+t^2)} = \frac{1+t^2}{(1+t^2)(1+2x+t^2)+x^2(1+t^2)} = \\ &= \frac{1+t^2}{(1+t^2)(1+x^2+2x+t^2)} = \frac{1}{1+x^2+2x+t^2} = \frac{1}{(1+x)^2+t^2}\,.\end{aligned}$$

Dunque

$$F'(x) = \int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x)^2+t^2}\,dt = \frac{1}{(1+x)^2}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+\big(\frac{t}{1+x}\big)^2}\,dt\,.$$

Facciamo il cambio di variabile $u = t/(1+x)$, $dt = (1+x)du$:

$$F'(x) = \frac{1}{(1+x)^2}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+u^2}(1+x)du = \frac{1}{1+x}\big[\arctan u\big]_0^{+\infty} = \frac{1}{1+x}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2(1+x)}\,.$$

Osserviamo che

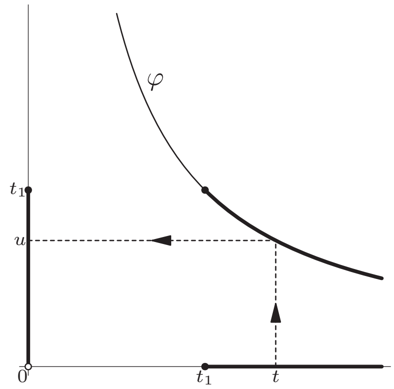
$$F(0) = \int_0^{+\infty}\frac{1}{t}\arctan\Big(\frac{0t}{1+0+t^2}\Big)dt = 0.$$

Dunque, usando il teorema fondamentale del calcolo,

$$F(x) = F(0) + \int_0^x F'(s)\,ds = 0 + \int_0^x\frac{\pi}{2(1+s)}ds = \Big[\frac{\pi}{2}\log(1+s)\Big]_0^x = \frac{\pi}{2}\log(1+x) \qquad \forall x > -1.$$

d. Come abbiamo già detto nel punto **a**, quando $x < -1$ la funzione integranda ha una discontinuità di salto per $t = t_1 = \sqrt{-1-x}$. Spezziamo l'integrale nel punto di salto:

$$F(x) = \int_0^{+\infty} f(x,t)\,dt = \int_0^{t_1} f(x,t)\,dt + \int_{t_1}^{+\infty} f(x,t)\,dt.$$



Consideriamo il cambio di variabile

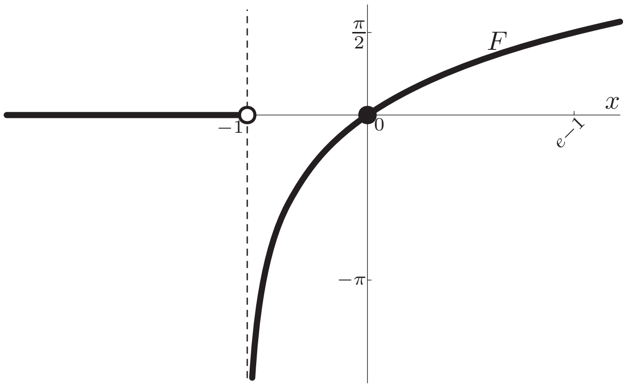
$$u = \varphi(t) := \frac{-1-x}{t} = \frac{t_1^2}{t}\,, \qquad t = \frac{-1-x}{u} = \varphi(u) = \varphi^{-1}(u)\,.$$

Questo è chiaramente un diffeomorfismo decrescente di $]0,+\infty[$ in se stesso, e $\varphi = \varphi^{-1}$. Inoltre

$$\varphi(t_1) = \frac{-1-x}{\sqrt{-1-x}} = \sqrt{-1-x} = t_1\,.$$

Quindi φ manda $[t_1,+\infty[$ in $]0,t_1]$ (e viceversa). Cambiamo variabile $t = \varphi(u)$ in uno dei due integrali e semplifichiamo il risultato:

$$\begin{aligned}
\int_{t_1}^{+\infty} f(x,t)\,dt &= \int_{\varphi^{-1}(t_1)}^{\varphi^{-1}(+\infty)} f\big(x,\varphi(u)\big)\varphi'(u)\,du = \int_{t_1}^{0} f\big(x,\varphi(u)\big)\Big(-\frac{-1-x}{t^2}\Big)du = \\
&= \int_0^{t_1} f\big(x,\varphi(u)\big)\frac{-1-x}{u^2}\,du = \int_0^{t_1} \frac{1}{\varphi(u)} \arctan\Big(\frac{x\varphi(u)}{1+x+\varphi(u)^2}\Big)\frac{-1-x}{u^2}\,du = \\
&= \int_0^{t_1} \frac{u}{-1-x} \arctan\left(\frac{x\frac{-1-x}{u}}{1+x+\big(\frac{-1-x}{u}\big)^2}\right)\frac{-1-x}{u^2}\,du = \\
&= \int_0^{t_1} \frac{1}{u} \arctan\Big(\frac{x(-1-x)u}{u^2(1+x)+(-1-x)^2}\Big)du = \\
&= \int_0^{t_1} \frac{1}{u} \arctan\Big(\frac{xu}{-u^2+(-1-x)}\Big)du = \int_0^{t_1} \frac{1}{u} \arctan\Big(-\frac{xu}{u^2+1+x}\Big)du = \\
&= -\int_0^{t_1} \frac{1}{u} \arctan\Big(\frac{xu}{1+x+u^2}\Big)du = -\int_0^{t_1} f(x,u)\,du = \\
&= -\int_0^{t_1} f(x,t)\,dt\,.
\end{aligned}$$



In definitiva

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int_0^{t_1} f(x,t)\,dt + \int_{t_1}^{+\infty} f(x,t)\,dt = \\
&= \int_0^{t_1} f(x,t)\,dt - \int_0^{t_1} f(x,t)\,dt = \\
&= 0 \qquad \forall x < -1.
\end{aligned}$$

Si poteva anche fare il cambio di variabile φ sull'integrale complessivo su tutto $]0,+\infty[$: dei conti simili ai precedenti portano all'uguaglianza $F(x) = -F(x)$, da cui $F(x) = 0$.