Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 1996/97

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Istituzioni di Analisi Superiore, primo modulo

Prova Scritta del 3 settembre 1997

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento di identità (se chiesto):

Chi porta quest'unico modulo ha 90 minuti di tempo e deve ritenersi a punteggio pieno con 15 punti. Chi porta due moduli ha tempo tre ore complessive e ha punteggio pieno con 30 punti, anche se presi tutti da uno solo dei due compiti.

1. a. Sia $\alpha > 0$ un parametro. Dimostrare che la funzione $f_\alpha\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita come

$$f_\alpha(x, y, z) := e^{-\alpha x} \cos(xy)$$

(non dipende da z) è integrabile secondo Lebesgue sulla regione

$$E := \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0,\, 0 \leq y \leq z \leq 1\Big\}.$$

Calcolando gli integrali iterati lasciando rispettivamente per ultima o per prima l'integrazione in x dimostrare che vale la relazione

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \frac{1 - \cos x}{x^2}\, dx = \arctan \frac{1}{\alpha} - \frac{\alpha}{2} \ln(1 + \alpha^2) \qquad \text{per } \alpha > 0.$$

b. Dimostrare che nella formula precedente si può passare al limite per $\alpha \to 0^+$ e ricavarne il valore degli integrali

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2}\, dx \qquad \text{e} \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}\, dx\,.$$

(Il secondo si deduce dal primo con una formuletta di trigonometria e un cambio di variabili).

2. Sia $(X, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura, $f\colon X \to \mathbb{R}$ misurabile, e poniamo $E_n := \{x \in X : |f(x)| > n\}$ per $n \in \mathbb{N}$.

a. Se $f \in L^1(\mu)$ allora $n\mu(E_n) \to 0$ per $n \to +\infty$. Mostrare che non vale il viceversa, sia per X di misura infinita che finita.

b. Se $f \in L^1(\mu)$ allora $\sum_{n \geq 0} n(\mu(E_n) - \mu(E_{n+1})) < +\infty$. Quando X ha misura finita vale anche il viceversa, ma non se X ha misura infinita.

Punti: 6+6, 8+6

Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 1996/97

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Istituzioni di Analisi Superiore, secondo modulo

Prova Scritta del 3 settembre 1997

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento di identità (se chiesto):

Chi porta quest'unico modulo ha 90 minuti di tempo e deve ritenersi a punteggio pieno con 15 punti. Chi porta due moduli ha tempo tre ore complessive e ha punteggio pieno con 30 punti, anche se presi tutti da uno solo dei due compiti.

1. Uno spazio normato X si dice *uniformemente convesso* se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che per ogni $x, y \in X$ si abbia

$$\left(\|x\| \le 1\,, \quad \|y\| \le 1\,, \quad \left\|\frac{x+y}{2}\right\| \ge 1-\delta\right) \quad \Longrightarrow \quad \|x-y\| < \varepsilon\,.$$

"Grosso" modo questo vuol dire che se un segmento è contenuto nella palla unitaria e il suo punto medio è molto vicino al bordo, allora il segmento è necessariamente molto corto.

a. Dimostrare che uno spazio con prodotto scalare è uniformemente convesso. (Ricordare l'identità del parallelogrammo).

b. Dimostrare che $\mathbb{R}^2$ con le norme $\|(x,y)\|_1 := |x| + |y|$ oppure $\|(x,y)\|_\infty := \max\{|x|, |y|\}$ non è uniformemente convesso.

c. Dimostrare che in uno spazio uniformemente convesso il bordo della palla unitaria non può contenere segmenti non degeneri.

d. Uno spazio a dimensione finita è uniformemente convesso se e solo se il bordo della palla unitaria non contiene segmenti non degeneri. (Negando la definizione di convessità uniforme e usando la compattezza si trova un segmento non degenere contenuto nella palla unitaria chiusa il cui punto medio è sul bordo; con le proprietà generali della norma si trova poi che tutto il segmento deve essere sul bordo).

e. In uno spazio di Banach uniformemente convesso, dimostrare che, dato un punto e un convesso chiuso non vuoto, esiste uno e un solo punto del convesso con minima distanza dal punto dato. (Adattare la dimostrazione nota per gli spazi di Hilbert).

Punti: 4+2+3+4+8