Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Istituzioni di Analisi Superiore, primo modulo

Prova Scritta del 9 luglio 1997

Cognome e Nome:

Matricola: Documento di identità (se chiesto):

Chi porta quest'unico modulo ha 90 minuti di tempo e deve ritenersi a punteggio pieno con 15 punti. Chi porta due moduli ha tempo tre ore complessive e ha punteggio pieno con 30 punti, anche se presi tutti da uno solo dei due compiti.

1. a. Dimostrare che se $p, q > 0$ e $|x| \le 1$ allora

$$\int_0^1 \frac{t^{p-1}}{1-xt^q}dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{qn+p}\,.$$

(Usare la formula della somma della serie geometrica. Se $x < 0$ ricordarsi il criterio di Leibniz sulle serie a segni alterni, e in particolare che le somme parziali sono monotone sui pari e sui dispari...).

b. Dedurre dal punto precedente che

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(4n+1)(4n+2)} = \int_0^1 \frac{1-t}{1-t^4}\,dt = \frac{\pi + 2\ln 2}{8}\,,$$

e, più in generale,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(qn+1)(qn+2)} = \int_0^1 \frac{1-t}{1-t^q}\,dt\,.$$

(Trovare A, B in modo che $\frac{1}{(4n+1)(4n+2)} = \frac{A}{4n+1} + \frac{B}{4n+2}$; esprimere la serie $\sum_n \frac{x^n}{(4n+1)(4n+2)}$ come integrale usando la parte **a** e passare al limite per $x \to 1^-$. Non si può lavorare direttamente con $x = 1$ perché...).

2. Sia $(X, \mathcal{M})$ uno spazio misurabile e $\mu_n\colon \mathcal{M} \to [0, +\infty]$ una misura positiva per ogni $n \in \mathbb{N}$. Supponiamo che per ogni $E \in \mathcal{M}$ e ogni $n \in \mathbb{N}$ si abbia $\mu_n(E) \le \mu_{n+1}(E)$. Poniamo $\mu(E) := \sup_n \mu_n(E)$ per ogni $E \in \mathcal{M}$.

a. Dimostrare che anche μ è una misura.

b. Dimostrare che se $f\colon X \to [0, +\infty]$ è misurabile allora $\int_X f\,d\mu = \sup_n \int_X f\,d\mu_n$. Se invece $f \in L^1(\mu)$ (a segno qualsiasi) allora $f \in L^1(\mu_n)$ per ogni n e $\int_X f\,d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_X f\,d\mu_n$.

c. Mostrare un esempio in cui $L^1(\mu)$ non coincide con $\bigcap_n L^1(\mu_n)$.

Punti: 6+6, 3+3+3

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Istituzioni di Analisi Superiore, secondo modulo

Prova Scritta del 9 luglio 1997

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento di identità (se chiesto):

Chi porta quest'unico modulo ha 90 minuti di tempo e deve ritenersi a punteggio pieno con 15 punti. Chi porta due moduli ha tempo tre ore complessive e ha punteggio pieno con 30 punti, anche se presi tutti da uno solo dei due compiti.

1. Sia $\mathbb{U}$ il cerchio unitario di $\mathbb{C}$, dotato della solita misura boreliana normalizzata m, invariante per rotazioni. Data una $f \in L^1(\mathbb{U})$ e $n \in \mathbb{Z}$ indicheremo con $\hat{f}(n)$ il coefficiente di Fourier $\hat{f}(n) := \int_{\mathbb{U}} f(z)\bar{z}^n\, dm(z)$. Sia $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ fissato. Poniamo $f_k(z) := f(z^k)$ per ogni $f\colon \mathbb{U} \to \mathbb{C}$. Infine indichiamo con $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ le radici k-esime complesse di 1.

a. Se f è boreliana anche f_k lo è. Se $f \geq 0$ allora f e f_k hanno lo stesso integrale. Se f è boreliana complessa allora $\|f\|_p = \|f_k\|_p$ per ogni $1 \leq p \leq +\infty$.

b. Sia $f \in L^2(\mathbb{U})$. Dimostrare che la serie di Fourier $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n) z^{nk}$ converge in $L^2(\mathbb{U})$ verso f_k e dedurne che

$$\hat{f}_k(n) = \begin{cases} \hat{f}(n/k) & \text{se } n = 0 \text{ o se } k \text{ divide } n, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

c. Sia $f \in L^1(\mathbb{U})$ e $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Dimostrare che

$$\hat{f}_k(n) = \frac{\alpha_1^{-n} + \cdots + \alpha_k^{-n}}{k} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) e^{-int/k} \frac{dt}{2\pi}\,.$$

d. Dimostrare che se $n \in \mathbb{Z}$

$$\alpha_1^{-n} + \alpha_2^{-n} \cdots + \alpha_k^{-n} = \begin{cases} k & \text{se } n = 0 \text{ o se } k \text{ divide } n, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

(Le radici k-esime dell'unità sono potenze successive di una di loro...).

e. La formula per $\hat{f}_k(n)$ del punto **b** vale anche se $f \in L^1(\mathbb{U})$.

2. Sia X uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ e siano $g, f_1, f_2, \ldots, f_n\colon X \to \mathbb{R}$ dei funzionali lineari. Dimostrare che $\bigcap_{i=1}^n \ker f_i \subseteq \ker g$ se e solo se g è una combinazione lineare delle f_i.
(Per la '$\Rightarrow$', sia $T\colon X \to \mathbb{R}^n$ definita da $T(x) := (f_1(x), \ldots, f_n(x))$. Mostrare che sul sottospazio $T(X) \subseteq \mathbb{R}^n$ possiamo definire h come $h(Tx) := g(x)$, e che h si può estendere a un funzionale lineare su tutto $\mathbb{R}^n$...).

Punti: 6+4+4+3+1, 7