Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 1996/97

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Istituzioni di Analisi Superiore, primo modulo

Prova Scritta del 24 giugno 1997

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento di identità (se chiesto):

Chi porta quest'unico modulo ha 90 minuti di tempo e deve ritenersi a punteggio pieno con 15 punti. Chi porta due moduli ha tempo tre ore complessive e ha punteggio pieno con 30 punti, anche se presi tutti da uno solo dei due compiti.

1. Consideriamo la funzione f definita da

$$f(x) := \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} \ln t}{t^2 - x}\, dt \qquad \text{per } x < 1\,.$$

a. Dimostrare che f è ben definita e derivabile infinite volte.

b. Dimostrare che

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{4n^2 + 4n + 2} \qquad \text{se } |x| < 1\,.$$

(Sviluppare $1/(t^2 - x)$ in serie di potenze di x usando la formula della serie geometrica; viene una serie di integrali elementari).

c. Dimostrare che per ogni $x_0 < 1$ esiste una costante $A \geq 0$ tale che $|f^{(n)}(x)| \leq An!$ per ogni $x \leq x_0$. Dedurne che la serie di Taylor $\sum f^{(n)}(x_1)(x - x_1)^n/n!$ converge ad $f(x)$ almeno per $x \in]2x_1 - 1, 1[$ se $x_1 < 1$.
(Usare la formula di Lagrange del resto della serie di Taylor).

d. Le funzioni $f(x)$ e $f'(x)$ hanno limiti finiti per $x \to 1^-$?

e. Dimostrare che f è una soluzione dell'equazione differenziale

$$4x^2 f''(x) + 8x f'(x) + 2f(x) = \frac{1}{1 - x}\,.$$

(Per $|x| < 1$ si può usare il punto **c**; altrimenti al primo membro dell'equazione differenziale viene l'integrale di una funzione che miracolosamente ha una primitiva elementare: $-\frac{t}{t^2-x}(\operatorname{sen} \ln t + \cos \ln t) - \frac{2xt}{(t^2-x)^2} \cos \ln t$).

Punti: 3+7+4+4+7

Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 1996/97

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Istituzioni di Analisi Superiore, secondo modulo

Prova Scritta del 24 giugno 1997

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento di identità (se chiesto):

Chi porta quest'unico modulo ha 90 minuti di tempo e deve ritenersi a punteggio pieno con 15 punti. Chi porta due moduli ha tempo tre ore complessive e ha punteggio pieno con 30 punti, anche se presi tutti da uno solo dei due compiti.

1. Sia $\mathbb{U}$ il cerchio unitario di $\mathbb{C}$, dotato della solita misura boreliana m normalizzata e invariante per rotazioni. Per $z \in \mathbb{C}$ e $n \geq 1$ sia $\sqrt[n]{z}$ l'insieme delle radici n-esime di z. Per $f\colon \mathbb{U} \to \mathbb{C}$ e $n \geq 1$ poniamo

$$f_{\sqrt[n]{\ }}(z) := \frac{1}{n} \sum_{w \in \sqrt[n]{z}} f(w)\,,$$

cioè $f_{\sqrt[n]{\ }}(z)$ è la media aritmetica dei valori di f sulle radici ennesime di z.

a. Dimostrare che se f è boreliana anche $f_{\sqrt[n]{\ }}$ lo è.
(L'inversa della funzione $t \mapsto e^{it}$ da $[0, 2\pi[$ in $\mathbb{U}$ non è continua, ma è boreliana; si può esprimere $f_{\sqrt[n]{\ }}$ in termini di tale inversa).

b. Se $f \in L^1(\mathbb{U})$ allora anche $f_{\sqrt[n]{\ }} \in L^1(\mathbb{U})$ e hanno lo stesso integrale.

c. Se $f \in L^1(\mathbb{U})$ e $n \in \mathbb{Z}$ poniamo $\hat{f}(n) := \int_{\mathbb{U}} f(z)\bar{z}^n\, dm(z)$ il coefficiente di Fourier n-esimo di f. Dimostrare che se $n > 0$ si ha

$$\hat{f}(n) = \int_{\mathbb{U}} f_{\sqrt[n]{\ }}(z)\bar{z}\, dm(z) \qquad \text{e} \qquad \hat{f}(-n) = \int_{\mathbb{U}} f_{\sqrt[n]{\ }}(z) z\, dm(z)\,.$$

d. Sia $f \in L^1(\mathbb{U})$ a valori reali e $n \in \mathbb{Z}$. Dato $w \in \mathbb{C}$ poniamo $\operatorname{vec} w := (\Re w, \Im w)$ il vettore di $\mathbb{R}^2$ corrispondente. Mostrare che per $z \in \mathbb{U}$ si ha

$$\hat{f}(-n)\bar{z}^n + \hat{f}(n) z^n = 2 \operatorname{vec} \hat{f}(-n) \cdot \operatorname{vec} z^n\,,$$

dove il puntino indica il prodotto scalare ordinario in $\mathbb{R}^2$.

Interpretazione geometrica di **c** e **d**: se f è reale ≥ 0 e con integrale 1 su $\mathbb{U}$, possiamo vedere $f_{\sqrt[n]{\ }}$ come una distribuzione di massa su $\mathbb{C}$ concentrate su $\mathbb{U}$ e normalizzata, di cui $\hat{f}(-n)$ viene ad essere il baricentro. Il termine n-esimo della serie di Fourier di f nel punto $z \in \mathbb{U}$ è la componente ortogonale di $2\hat{f}(n)$ lungo il versore z^n.

2. Sia H uno spazio con prodotto scalare e $A\colon H \to H$ un operatore lineare tale che $(Ax \mid x) = 0$ per ogni $x \in H$. Dimostrare che se lo spazio H è complesso allora necessariamente $A \equiv 0$, mentre se H è reale A può essere non identicamente nullo (esibire un esempio).
(Mostrare prima che $(Ax \mid y) + (Ay \mid x) = 0$ per ogni $x, y \in H$; porre poi ... al posto di y...).

Punti: 5+5+5+2, 8