Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Istituzioni di Analisi Superiore, primo modulo

Prova Scritta del 10 giugno 1997

Cognome e Nome:

Matricola: Documento di identità (se chiesto):

Chi porta quest'unico modulo ha 90 minuti di tempo e deve ritenersi a punteggio pieno con 15 punti. Chi porta due moduli ha tempo tre ore complessive e ha punteggio pieno con 30 punti, anche se presi tutti da uno solo dei due compiti.

1. Sia X un insieme non vuoto, $\mathcal{P}(X)$ l'insieme delle parti di X, e $\varphi\colon\mathcal{P}(X)\to[0,+\infty]$ una *"misura esterna"*, cioè una funzione tale che $\varphi(\varnothing)=0$, $A\subseteq B\Rightarrow\varphi(A)\le\varphi(B)$ per ogni $A,B\in\mathcal{P}(X)$ (monotonia) e $\varphi(\bigcup_n A_n)\le\sum_n\varphi(A_n)$ per ogni successione di insiemi $A_n\in\mathcal{P}(X)$ (subadditività numerabile). Definiamo come $\mathcal{M}$ l'insieme di tutti gli $E\subseteq X$ tali che

$$\forall A\subseteq X\qquad \varphi(A)=\varphi(A\cap E)+\varphi(A\setminus E)\,.$$

Bisogna dimostrare che $\mathcal{M}$ è una σ-algebra, che φ è numerabilmente additiva su $\mathcal{M}$ e che $(X,\mathcal{M},\varphi|_{\mathcal{M}})$ è uno spazio di misura completo. Si consiglia di seguire i passi seguenti (quando uno non viene lo si dia per scontato e si passi al successivo).

a. $E\in\mathcal{M}$ se e solo se $X\setminus E\in\mathcal{M}$.

b. $\varnothing, X\in\mathcal{M}$.

c. Subadditività finita: se $A,B\subseteq X$ allora $\varphi(A\cup B)\le\varphi(A)+\varphi(B)$.

d. Se $E\subseteq X$ e $\varphi(E)=0$ allora $E\in\mathcal{M}$. (Notare che nell'uguaglianza che definisce $\mathcal{M}$ vale sempre '$\le$' per il punto precedente, poi usare la monotonia).

e. Se $E,F\in\mathcal{M}$ e $E\cap F=\varnothing$ allora $\varphi(E\cup F)=\varphi(E)+\varphi(F)$.

f. Se $E,F\in\mathcal{M}$ (anche non disgiunti) allora $E\cup F\in\mathcal{M}$. (Scrivere l'uguaglianza che definisce $\mathcal{M}$ per le coppie $(A,E),(A\setminus E,F),(A\cap(E\cup F),E)$ e combinare i risultati, evitando il trabocchetto di $+\infty-\infty$).

g. Se $E_n\in\mathcal{M}$ per ogni $n\in\mathbb{N}$ e sono a due a due disgiunti, allora $\varphi(\bigcup_n E_n)=\sum_n\varphi(E_n)$.

h. Se $E,F\in\mathcal{M}$, $E\cap F=\varnothing$ e $A\subseteq X$ allora $\varphi(A\cap(E\cup F))=\varphi(A\cap E)+\varphi(A\cap F)$.

i. Se $E_n\in\mathcal{M}$ per ogni $n\in\mathbb{N}$ e sono a due a due disgiunti allora $\bigcup_n E_n\in\mathcal{M}$. (Scrivere la solita uguaglianza per l'unione finita $E_1\cup\ldots\cup E_n\in\mathcal{M}$, usare il punto precedente iterato per un addendo, minorare l'altro con la monotonia, passare al limite, e usare la subadditività numerabile).

j. Se $E,F\in\mathcal{M}$ allora $E\setminus F\in\mathcal{M}$. (Scrivere la solita uguaglianza per le coppie $(A,E\cup F),(A\cap(E\cup F),F),(A\setminus(E\setminus F),F)$ e combinare i risultati).

k. Se $E_n\in\mathcal{M}$ per ogni $n\in\mathbb{N}$ allora $\bigcup_n E_n\in\mathcal{M}$. (Riscrivere l'unione in forma disgiunta usando il punto precedente).

Punti: 2+2+2+4+3+8+3+2+8+8+3

Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 1996/97

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Istituzioni di Analisi Superiore, secondo modulo

Prova Scritta del 10 giugno 1997

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento di identità (se chiesto):

Chi porta quest'unico modulo ha 90 minuti di tempo e deve ritenersi a punteggio pieno con 15 punti. Chi porta due moduli ha tempo tre ore complessive e ha punteggio pieno con 30 punti, anche se presi tutti da uno solo dei due compiti.

1. Sia M un sottospazio vettoriale dello spazio di Hilbert H, e sia f un funzionale lineare continuo da M a valori scalari. Dimostrare che esiste uno e un solo funzionale lineare continuo definito su tutto H a valori scalari che coincide con f su M e che abbia la stessa norma operatoriale.

(f si estende per continuità alla chiusura di M, che è di Hilbert. Usare la rappresentazione dei funzionali lineari su uno spazio di Hilbert, senza bisogno di Hahn-Banach generale. La norma operatoriale di $x \mapsto (x \mid y)$ è $\|y\|$).

2. Sia $\ell_0^\infty(\mathbb{N})$ lo spazio vettoriale delle successioni $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ infinitesime, dotato della norma dell'estremo superiore:

$$\|x\| = \|x\|_\infty := \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| \qquad \text{dove } x = (x_0, x_1, x_2, x_3, \dots)\,.$$

Dimostrare che $\ell_0^\infty(\mathbb{N})$ è completo. Consideriamo la funzione

$$f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x_n}{n!}\,.$$

Verificare che $f\colon \ell_0^\infty(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$ è ben definita, lineare e continua. Sia $\bar{B}$ la palla unitaria chiusa in $\ell_0^\infty(\mathbb{N})$. Dimostrare che

$$\sup_B f = e$$

(il numero di Nepero), ma che non si tratta di un massimo. Dedurne che $\bar{B}$ non è compatta.

Punti: 15, 15