Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 96/97

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Istituzioni di Analisi Superiore, primo modulo

Prova Scritta del 3 aprile 1997

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento di identità (se chiesto):

Tempo a disposizione: 90 minuti. Si è a punteggio pieno con 30 punti.

1. Verificare che

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2z}\theta\, d\theta = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2z} 2\theta\, d\theta \qquad \text{se } \Re z > -1/2$$

(cambio di variabile e simmetria), e dedurne la *formula di duplicazione* per la funzione Gamma:

$$\Gamma(2z) = \frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(z)\Gamma\Big(z+\frac{1}{2}\Big) \qquad \text{se} \quad \Re z > 0 \quad \text{e i due membri sono } \neq 0$$

(duplicazione del seno, formula trigonometrica della funzione Beta e sua relazione con la Gamma). La formula di duplicazione si estende agli z con $\Re z \leq 0$ per i quali i due membri hanno senso e sono $\neq 0$?

2. a. Sia $f \in L^1([0,1])$. Dimostrare che esiste $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ misurabile tale che $g(x) \to +\infty$ per $x \to 0^+$ e $fg \in L^1([0,1])$.
(Esiste una successione $a_n \searrow 0$ tale che $\int_0^{a_n} |f| \leq 2^{-n}$. Definire g con una costante opportuna su ciascun intervallo $[a_{n+1}, a_n[$).

b. Data una successione a_n reale e divergente a $+\infty$, esiste una seconda successione $b_n \geq 0$ tale che $\sum b_n < +\infty$ ma $\sum a_n b_n = +\infty$?
(Se a_n diverge rapidamente è facile; altrimenti si può estrarre una sottosuccessione).

c. Sia $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ misurabile tale che $g(x) \to +\infty$ per $x \to 0^+$. Dimostrare che esiste $f \in L^1([0,1])$ tale che $fg \notin L^1([0,1])$.
(Ci si può riportare al problema del punto **b** minorando g con una funzione tipo "gradino").

Punti: 12, 6+6+6