Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 1995/96 e 96/97

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Istituzioni di Analisi Superiore, primo modulo

Prova Scritta del 3 febbraio 1997

Cognome e Nome:

Matricola: Documento di identità (se chiesto):

Chi porta quest'unico modulo ha 90 minuti di tempo e deve ritenersi a punteggio pieno con 15 punti. Chi porta due moduli ha tempo tre ore complessive e ha punteggio pieno con 30 punti, anche se presi tutti da uno solo dei due compiti. Il terzo esercizio è riservato agli studenti che hanno seguito il corso nel 1995/96.

---

1. Dimostrare che per $\omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $a \in \mathbb{R}$ si ha

$$\int_0^{+\infty} \left| \frac{x \operatorname{sen} \omega x}{a^2 + x^2} \right| dx = +\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{r \to +\infty} \int_0^r \frac{x \operatorname{sen} \omega x}{a^2 + x^2}\, dx = \frac{\pi}{2} e^{-\omega |a|}\,.$$

(Per il secondo integrale usare il fatto, se è vero, che $x/(a^2 + x^2) = \int_0^\infty e^{-xt} \cos at\, dt$, oppure, usando i complessi, decomporre $x/(a^2 + x^2)$ in somma e notare che $1/(x \pm ia) = \int_0^\infty \exp(-(x \pm ia)t)\, dt$. Scambiare poi se si può l'ordine di integrazione, calcolare quegli integrali che sono elementari e passare al limite per $r \to +\infty$).

---

2. Sia $(X, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura positiva tale che $\mu(X) < +\infty$. Sia $T\colon X \to X$ una funzione biiettiva, che trasforma misurabili in misurabili, e che conserva la misura, cioè tale che $\mu(T(E)) = \mu(E)$ per ogni E misurabile. Dato un qualsiasi $E \in \mathcal{M}$ dimostrare che, rispetto a μ, quasi tutti i punti $x \in E$ hanno la proprietà che almeno una delle iterate $T(x), T^2(x), T^3(x) \ldots$ cade in E.
(Sia F l'insieme degli $x \in E$ le cui iterate non cadono mai in E. F è misurabile? Mostrare che le immagini $T(F), T^2(F), T^3(F) \ldots$ sono sottinsiemi misurabili di X a due a due disgiunti, con la stessa misura. . .).

---

3. Consideriamo il problema di Cauchy

$$\dot{x} = |x| - \left|t^3 + t\right|\,, \qquad x(t_0) = x_0\,.$$

a. Dimostrare che il problema ha una e una sola soluzione massimale $t \mapsto x(t, t_0, x_0)$, che è definita per ogni $t \in \mathbb{R}$. Cosa succede scambiando t_0, x_0 con $-t_0, -x_0$?

b. Dimostrare che se $x_0 > 0$ allora $x(t, 0, x_0) > 0$ per ogni $t < 0$.
(Che segno ha $\dot{x}$ quando $x = 0$?).

c. Calcolare in termini di funzioni elementari la soluzione $x(t, 0, x_0)$ per valori di t vicini a 0. Verificare che non ha derivata seconda per $t = 0$.

d. Trovare i limiti per $t \to \pm\infty$ di $x(t, 0, x_0)$, in dipendenza da x_0.
(Per certi x_0 basta la formula esplicita. Per gli altri notare che nel secondo e quarto quadrante si può usare per esempio la disuguaglianza $\dot{x} \leq |x|$ e il teorema del confronto).

Punti: 15, 15, 3+4+6+6

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Istituzioni di Analisi Superiore, secondo modulo

Prova Scritta del 3 febbraio 1997

Cognome e Nome:

Matricola: Documento di identità (se chiesto):

Chi porta quest'unico modulo ha 90 minuti di tempo e deve ritenersi a punteggio pieno con 15 punti. Chi porta due moduli ha tempo tre ore complessive e ha punteggio pieno con 30 punti, anche se presi tutti da uno solo dei due compiti.

1. Consideriamo su $\mathbb{R}$ la σ-algebra dei misurabili secondo Lebesgue, la misura μ definita da $\mu(E) := \int_E \exp(-x^2)\,dx$, e lo spazio di Banach reale $L^p(\mu)$ per $1 \leq p < +\infty$.

a. Data $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiamo la traslata Tf come $(Tf)(x) := f(x+1)$. Mostrare che T non manda $L^p(\mu)$ in sé, cioè non è vero che $f \in L^p(\mu) \Rightarrow Tf \in L^p(\mu)$

b. Dimostrare che la funzione $x \mapsto x^n$ appartiene a $L^p(\mu)$ con norma $\Gamma(\frac{np+1}{2})^{1/p}$. Dare condizioni sufficienti sui coefficienti della serie di potenze reale $\sum a_n x^n$ affinché converga nella norma di $L^p(\mu)$.

c. Dimostrare che la serie di MacLaurin della funzione $x \mapsto \exp(-x^2)$ converge in $L^1(\mu)$. (Scrivere il resto di Lagrange della serie di MacLaurin di $t \mapsto e^t$, sostituire $t = -x^2$ e maggiorare).

d. Per $n \in \mathbb{N}$ poniamo $p_n(x) := e^{x^2} D^n(e^{-x^2})$, dove D è l'operatore di derivazione. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ dimostrare che p_n è un polinomio, che vale la relazione ricorsiva $p_{n+1}(x) = p_n'(x) - 2xp_n(x)$, che p_n verifica l'equazione differenziale $p_n'' - 2xp_n' + 2np_n = 0$, e che $p_{n+1}' = -2(n+1)p_n$.

e. Dimostrare che per il prodotto scalare in $L^2(\mu)$ dei polinomi p_n del punto precedente vale la relazione $(p_n \mid p_m) = -2n(p_{n-1} \mid p_{m-1})$. Dedurre che i p_n formano un sistema ortogonale in $L^2(\mu)$.
(Integrare per parti).

Punti: 6+4+10+6+6