Supponiamo di avere il seguente integrale

$$\int \frac{K}{ax^2 + bx + c}$$

Ora esistono α, β tali che

$$\int \frac{K}{ax^2 + bx + c} = \frac{K}{a} \int \frac{1}{x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}} = \frac{K}{a} \int \frac{1}{(x+\beta)^2 + \alpha^2}$$

dovrà risultare vera la seguente

$$x^2 + \beta^2 + 2\beta x + \alpha^2 = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$$

cioè

$$\begin{cases} \beta^2 + \alpha^2 = \frac{c}{a} \\ 2\beta = \frac{b}{a} \end{cases}$$

quindi

$$\begin{cases} \alpha = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a} \\ \beta = \frac{b}{2a} \end{cases}$$

dove $\Delta = b^2 - 4ac$.

Ora

$$(\arctan(\frac{x}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha}))' = \frac{\frac{1}{\alpha}}{(\frac{x}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha})^2 + 1}$$

che moltiplicato per α^2 sopra e sotto

$$(\arctan(\frac{x}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha}))' = \frac{\alpha}{(x+\beta)^2 + \alpha^2}$$

quindi

$$\int \frac{K}{ax^2 + bx + c} = \frac{K}{a} \int \frac{1}{(x+\beta)^2 + \alpha^2} = \frac{K}{a\alpha} \left[\int \frac{\alpha}{(x+\beta)^2 + \alpha^2} \right] = \frac{K}{a\alpha} \left[\arctan(\frac{x}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha}) \right]$$

infine sostituendo α, β con a, b ho

$$\int \frac{K}{ax^2 + bx + c} = \frac{2K}{\sqrt{-\Delta}} \left[\arctan(\frac{2ax}{\sqrt{-\Delta}} + \frac{b}{\sqrt{-\Delta}}) \right] = \frac{2K}{\sqrt{-\Delta}} \arctan\left(\frac{2ax + b}{\sqrt{-\Delta}} \right)$$

Naturalmente se ci si ricorda la formula si puo anche soltanto applicare l'ultimo passaggio.

$$\boxed{\int \frac{K}{ax^2+bx+c} = \frac{2K}{\sqrt{-\Delta}} \arctan\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}} \right)} \tag{1}$$

Esempio 1. Risolvere il seguente

$$\int \frac{\sqrt{3}}{2x^2 + 3x + 2}$$

calcolo prima di tutto il delta

$$\Delta = 3^2 - 4 * 2 * 2 = -7 < 0$$

negativo quindi posso applicare la regoletta 1

$$\int \frac{\sqrt{3}}{2x^2 + 3x + 2} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}} \arctan\left(\frac{4x + 3}{\sqrt{7}} \right)$$